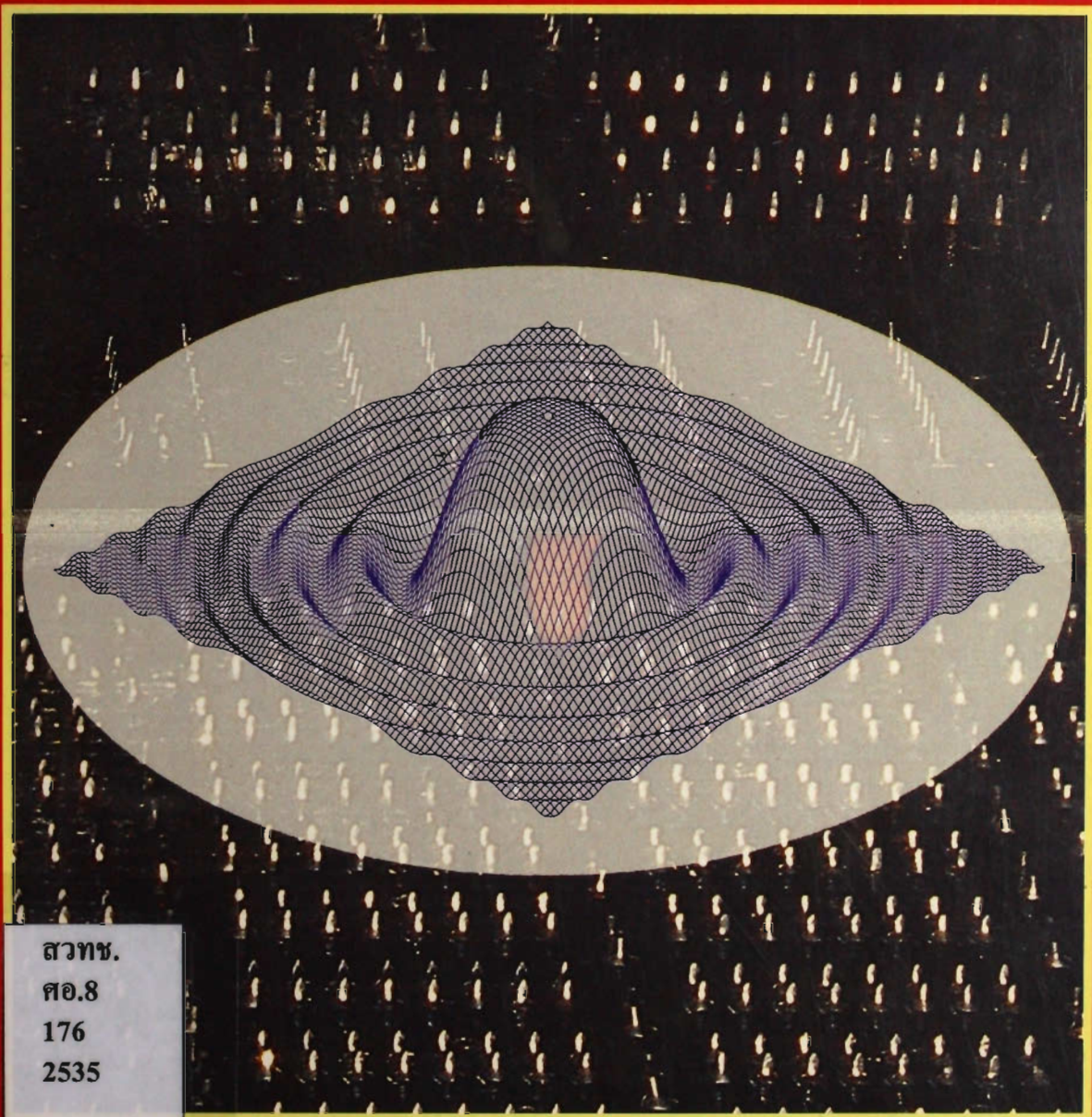


การประมวลสัญญาณดิจิทัล

ตอนการออกแบบวงจรของดิจิทัล

(Digital Signal Processing : Digital Filter Design)

ดร.ไพรัช รัชยพงษ์



สวทช.

ศอ.8

176

2535

จัดทำโดย



ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ

สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ

กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และสิ่งแวดล้อม

การประมวลสัญญาณดิจิทัล ตอนการออกแบบวงจรกรองดิจิทัล

ดร.ไพรัช รัชยพงษ์

จัดทำโดย

ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ
สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ
กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และสิ่งแวดล้อม

ศูนย์เทคโนโลยี
STK
สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์
และเทคโนโลยีแห่งชาติ
000035
2/2/61



การประมวลสัญญาณัติจิตอล ตอนการออกแบบวงจรองติจิตอล

ดร.ไพรัช รัชพงษ์

ราคา 65 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1

กันยายน 2535

จำนวนพิมพ์ 2,000 เล่ม

จัดทำและ

สงวนลิขสิทธิ์โดย

ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ

สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ

กระทรวงวิทยาศาสตร์เทคโนโลยี และสิ่งแวดล้อม

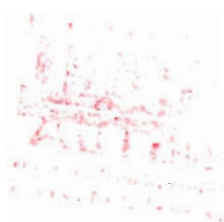
ออกแบบและจัดพิมพ์โดย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

โทร. 4270039 ต่อ 2400, 2401

พิมพ์ที่ บริษัท เอ็ดสัน เพรส โปรดักส์ จำกัด

โทร. 3180068, 3195226-7



สงวน
ลิขสิทธิ์
176
2535

คำนำ

ปัจจุบันผู้ที่อยู่ในวงการอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์จะทราบได้ว่าได้มีการนำความรู้เรื่องการประมวลสัญญาณดิจิทัล หรือที่รู้จักกันในภาษาอังกฤษว่า Digital Signal Processing หรือย่อ ๆ ว่า DSP มาใช้กันแพร่หลายมากขึ้นทุกวัน ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์แทบทุกประเภทรวมทั้งในคอมพิวเตอร์ และโทรคมนาคมโดยอาจจะเขียนเป็นซอฟต์แวร์ทั้งหมด หรืออาจอยู่ในรูปของวงจรรวม (Integrated Circuit) ที่เรียกเป็นภาษาอังกฤษกันว่า DSP Chip ผสมกันซอฟต์แวร์ที่เราต้องเขียนขึ้นมาบางส่วน ความสะดวกของการใช้วงจรรวมราคาที่ถูกลงทุกวัน ขณะที่สมรรถนะได้รับการปรับปรุงเพิ่มขึ้นตลอดเวลาเช่นกัน ทำให้เราพบ DSP Chip มากขึ้นในอุปกรณ์ต่าง ๆ

คำราเล่มนี้จึงเขียนขึ้นมาเพื่อให้เข้าใจพื้นฐานที่แท้จริงของความรู้เรื่องการประมวลสัญญาณดิจิทัลโดยจับประเด็นของโครงสร้าง และการออกแบบวงจรกรองดิจิทัล ในบทที่ 1 จะเป็นการกล่าวถึงโครงสร้างและประเภทของวงจรกรองดิจิทัล โครงสร้างมีทั้งแบบตรง I แบบตรง II แบบอนุกรม แบบขนาน และแบบลุ่มความถี่ สำหรับประเภทนั้นได้แก่วงจรกรองดิจิทัลไอโออาร์ และวงจรกรองดิจิทัลเอ็ฟไออาร์ ส่วนบทที่ 2 จะอธิบายการออกแบบวงจรกรองดิจิทัลไอโออาร์ในรายละเอียด โดยจะท้าวความถึงวงจรกรองสัญญาณอนาลอกก่อน แล้วจึงกล่าวถึงวิธีแปลงเป็นวงจรกรองดิจิทัลด้วยวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ และวิธีไบเลนิร์ทรานส์ฟอร์ม จากนั้นจึงอธิบายวิธีแปลงวงจรกรองดิจิทัลโลว์พาสส์ให้เป็นไฮพาสส์ แบนด์พาสส์ และแบนด์รีเจ็กตามลำดับ ในบทที่ 3 เป็นการอธิบายการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์ เริ่มด้วยวิธีหน้าต่าง วิธีดีเอ็ฟที และวิธีผสมดีเอ็ฟทีและหน้าต่าง

คำราเล่มนี้มีสมมุติฐานว่า ผู้อ่านมีความคุ้นเคยกับเรื่องวิธีแปลง Z (Z-Transform) และสมการแตกต่าง (difference equation) มาก่อน เนื้อหาโดยส่วนใหญ่เป็นการเรียบเรียงจากเอกสารอ้างอิงท้ายคำราเล่มนี้

ดร.ไพรัช ธัชยพงษ์

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1 โครงสร้างวงจรกรองดิจิตอล	7
บทนำ.....	7
สมการพหุนามระบบ	8
การจำแนกประเภทของวงจรกรอง.....	8
โครงสร้างแบบตรง I และแบบตรง II	10
โครงสร้างอนุกรมส่วนย่อยลำดับสอง	15
โครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสอง.....	18
โครงสร้างวงจรกรองดิจิตอลที่มีเฟสเชิงเส้น.....	21
โครงสร้างสู่ความถี่สำหรับวงจรกรองดิจิตอลเอ็ฟไออาร์	24
สรุป.....	32

บทที่ 2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลไอไออาร์.....	33
บทนำ.....	33
ฟังก์ชันของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกและ	
การตอบสนองความถี่	34
การออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอก	36
วิธีแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาลอกเป็น	
วงจรกรองสัญญาณดิจิตอล	61
การแปลงความถี่เพื่อเปลี่ยนวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล	
ชนิดโลว์พาสส์เป็นชนิดอื่น	79
วงจรกรองสัญญาณชนิดฮอลพาสส์	98
สรุป.....	101

บทที่ 3	วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์.....	102
	บทนำ.....	102
	การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล	
	ประเภทเอ็ฟไออาร์ด้วยวิธีหน้าต่าง.....	103
	วิธีสี่เหลี่ยมในการประมาณค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ปรารถนา.....	129
	การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์	
	โดยการผสมวิธีสี่เหลี่ยมและวิธีหน้าต่าง	138
	สรุป.....	152

บทที่ 1

โครงสร้างวงจรรองดิจิตอล

1.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีที่แพร่หลายในการสร้างวงจรรองดิจิตอลจากสมการแตกต่าง (difference equation), การตอบสนองค่าหนึ่งหรือ z - ทรานส์ฟอร์ม เราจะเริ่มจากสมการที่ใช้พรรณาวงจรรองดิจิตอลทั้งในแกนเวลาและในรูปของ z - ทรานส์ฟอร์ม โครงสร้างวงจรรองดิจิตอลที่สร้างโดยตรงจากสมการแตกต่างหรือฟังก์ชันระบบ เราจะเรียกว่าแบบตรง I (Direct Form I) จากนั้นจะทำการลดรูปเพื่อให้ประหยัดหน่วยความจำทำให้ได้โครงสร้างที่สองซึ่งจะเรียกว่าแบบตรง II (Direct Form II) วงจรรองดิจิตอลยังสามารถสร้างให้มีประสิทธิภาพด้านความไวของตัวเลข (numerical sensitivity) และชิ้นส่วนฮาร์ดแวร์ที่มากขึ้นได้โดยใช้แบบอนุกรมของส่วนลำดับสอง (cascade of second-order section) และแบบขนานของส่วนลำดับสอง (parallel of second-order section) โครงสร้างทั้งสี่แบบที่กล่าวถึงมานี้จะเป็นแบบที่นิยมแพร่หลายในการสร้างวงจรรองดิจิตอลที่มีทั้งโพลและซีโร สำหรับวงจรรองดิจิตอลทั้งมีแต่ซีโรและเฟสเชิงเส้นจะมีโครงสร้างปราศจากส่วนป้อนกลับลักษณะพิเศษที่ทำให้สามารถลดหน่วยคูณลงได้ประมาณครึ่งหนึ่ง และท้ายที่สุดเราจะอธิบายโครงสร้างที่เรียกว่าแบบสุ่มความถี่ (frequency-sampling) ซึ่งเป็นอีกวิธีหนึ่งในการสร้างวงจรรอง

1.2 สมการพรรณาระบบ

ซึ่งจะหมายถึงสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้า (input) และสัญญาณออก (output) ทั้งในขอบข่ายของเวลา และขอบข่ายของ z ทราบนส์ฟอร์มซึ่งเคยอธิบายมาแล้วในบทก่อน ๆ แต่จะเขียนที่นี้อีกครั้งหนึ่งดังนี้

ในขอบข่ายเวลาหรือแกนเวลา สมการพรรณาระบบอาจอยู่ในรูปของสมการคอนโวลูชัน กล่าวคือ

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \quad (1.1)$$

หรืออาจแสดงอยู่ในรูปของสมการแตกต่างดังนี้

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k x(n-k) \quad (1.2)$$

ในขอบข่ายความถี่หรืออาจเรียกว่าในขอบข่าย z - ทราบนส์ฟอร์ม แสดงได้ด้วยฟังก์ชันระบบ 2 รูปแบบ รูปแบบแรกอยู่ในลักษณะผลรวมของผลคูณดังนี้

$$H(z) = \sum_{k=-N_p}^{N_p} b_k Z^{-k} / 1 - \sum_{k=1}^M a_k Z^{-k} \quad (1.3)$$

ส่วนรูปแบบที่สองอยู่ในลักษณะ ผลคูณของแฟคเตอร์ดังนี้

$$H(z) = Az^{N_p} \prod_{k=1}^{N_p+N_p} (1-C_k Z^{-1}) / \prod_{k=1}^M (1-d_k Z^{-1}) \quad (1.4)$$

1.3 การจำแนกประเภทของวงจรกรอง

วงจรกรองดิจิทัลจะถูกจำแนกตามความนานของการตอบสนองค่าหนึ่ง หรือตามโครงสร้างของวงจรกรองนั้น ๆ หากการตอบสนองค่าหนึ่งนานไปจนถึงอนันต์เราเรียกววงจรกรองดิจิทัลนั้นว่า ไอโออาร์ มาจากภาษาอังกฤษ IIR ซึ่งย่อมาจาก Infinite-Impulse Response (หมายเหตุ ตอนรู้จักวงจรกรองในระยะแรก ๆ ยังใช้คำว่า อิมพัลส์ (impulse) แทนที่จะใช้คำว่า ค่าหนึ่ง

(unit-sample) ด้วยเหตุนี้ ถ้าว่า อิมพัลส์ยังติดอยู่ในชื่อของวงจรกรองดิจิทัลนั้นว่าเอ็ฟไออาร์ มาจากภาษาอังกฤษ FIR ซึ่งย่อมาจาก Finite-Impulse Response

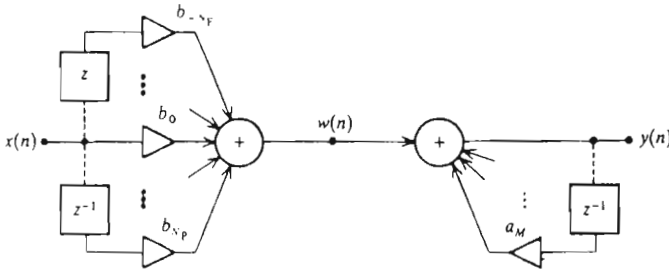
วงจรกรองดิจิทัลอาจถูกจำแนกในอีกลักษณะหนึ่งตามลักษณะของโครงสร้างของวงจร

โดยทั่วไปแล้วสัญญาณที่จุดออก ณ เวลาใดเวลาหนึ่งสามารถจะเป็นฟังก์ชันของอนาคต ปัจจุบันและอดีตของสัญญาณที่จุดเข้าและอดีตของสัญญาณที่จุดออก หากสัญญาณที่จุดออก ณ เวลาใดเวลาหนึ่งเป็นฟังก์ชันของสัญญาณที่จุดออกในอดีตโครงสร้างของวงจรกรองดิจิทัลก็จำเป็นต้องมีส่วนป้อนกลับ (feedback) เราจะเรียกววงจรกรองดิจิทัลลักษณะนี้ว่า วงจรกรองดิจิทัลรีเคอร์ซีฟ (recursive digital filter) หรือสั้น ๆ ว่า วงจรกรองรีเคอร์ซีฟ (recursive filter) เราอาจสังเกตวงจรดิจิทัลประเภทนี้ได้จากคุณสมบัติของสมการระบบกล่าวคือในสมการ (1.2) และ (1.3) จะต้องมีสัมประสิทธิ์ a_k อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่ใช่ค่าศูนย์ โดย $1 \leq k \leq M$ และในสมการ (1.4) จะต้องมีสัมประสิทธิ์ d_k อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่ใช่ค่าศูนย์โดย $1 \leq k \leq M$

หากสัญญาณที่จุดออก เป็น ฟังก์ชัน ของสัญญาณที่จุดเข้าเท่านั้น เราจะเรียกววงจรกรองดิจิทัลลักษณะนี้ว่า วงจรกรองดิจิทัลนอนรีเคอร์ซีฟ หรือสั้น ๆ ว่าวงจรกรองนอนรีเคอร์ซีฟ (non recursive filter) วงจรกรองดิจิทัลประเภทนี้จะสังเกตจากสมการพรรณาระบบได้โดยง่ายกล่าวคือ $a_k = 0$ ในสมการ (1.2) และ (1.3) หรือ $d_k = 0$ ในสมการ (1.4) ในทุก ๆ ค่าของ k สำหรับวงจรกรองนอนรีเคอร์ซีฟนี้พลทุกตัวจะอยู่ที่ $z = 0$ หรือ $z = \infty$ ซึ่งจะไม่มีผลประการใดต่อคำตอบสนองความถี่ของขนาดทำให้บางครั้งเราเรียกววงจรกรองนอนรีเคอร์ซีฟว่ามีแต่ซีโรเท่านั้น อย่างไรก็ตามเราควรตระหนักเสมอว่า ซีโรที่จะให้เฟสแบบเชิงเส้น

ในการสร้างวงจรนั้นหากเราต้องการให้การตอบสนองค่าหนึ่งนานจนถึงอนันต์แล้ว เราจำเป็นต้องใช้โครงสร้างแบบรีเคอร์ซีฟแบบใดแบบหนึ่ง ด้วยเหตุนี้จำเป็นที่ขอมรับกันว่าคำว่าไอโออาร์ และรีเคอร์ซีฟใช้สลับกันได้ แต่หากเราต้องการให้การตอบสนองค่าหนึ่งมีความนานที่สิ้นสุดเราต้องสร้างวงจรด้วยโครงสร้าง แบบนอนรีเคอร์ซีฟ ด้วยเหตุนี้คำว่า เอ็ฟไออาร์และนอนรีเคอร์ซีฟโดยปกติจะใช้สลับกันได้ นอกจากมีเพียงกรณีเดียวที่เป็นข้อยกเว้นกล่าวคือ วงจรกรองเอ็ฟไออาร์สามารถจะสร้างโดยใช้โครงสร้างที่เรียกว่า โครงสร้างสุ่มความถี่ (frequency-sampling structure) ซึ่งโครงสร้างนี้จะมีส่วนที่เป็นรีเคอร์ซีฟอยู่ด้วย จึงทำให้เป็นกรณีพิเศษที่ว่าโครงสร้างแบบรีเคอร์ซีฟถูกนำมาใช้เพื่อให้เกิดการตอบสนองค่าหนึ่งที่มีความนานสิ้นสุด

1.4 โครงสร้างแบบตรง I และแบบตรง II



รูปที่ 1.1 โครงสร้างแบบตรง

รูปที่ 1.1 แสดงโครงสร้างวงจรกรองดิจิทัลแบบตรง I ซึ่งลักษณะที่สำคัญเป็นการแยกตัวหน่วง (delay) เป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทางค้ำสัญญาณเข้า และกลุ่มทางค้ำสัญญาณออก โครงสร้างแบบตรง I นี้เหมาะสำหรับการสร้าง โดยเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่รูปแบบนี้จะสิ้นเปลืองหน่วยความจำมากเมื่อเทียบกับแบบตรง II ซึ่งจะพิจารณาค้างต่อไปน้จากฟังก์ชันระบบ (1.3) เราแยกเป็นสองส่วนอนุกรมกันโดยส่วนแรกประกอบด้วยซีโรเท่านั้น ตามด้วยส่วนที่สองซึ่งประกอบด้วยโพลเท่านั้นดังแสดงในรูปที่ 1.1 และในรูปนี้เราจะให้ $\{w(n)\}$ เป็นสัญญาณลักษณะของสัญญาณตรงจุดออกของส่วนแรกและขณะเดียวกันก็เป็นสัญญาณตรงจุดเข้าของส่วนที่สองด้วย ดังนั้นเราจะเขียนได้ว่า

$$w(n) = \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k x(n-k) \quad (1.5)$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + w(n) \quad (1.6)$$

ซึ่งเมื่อเขียนให้อยู่ในขอบข่ายของ z- ทรานส์ฟอร์มก็จะได้ว่า

$$W(z) = X(z) \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k z^{-k} \quad (1.7)$$

และ

$$Y(z) = W(z) / 1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \quad (1.8)$$

เนื่องจากระบบที่เรา กำลังพิจารณาอยู่ นี้มีความเป็นเชิงเส้น เพราะฉะนั้นส่วนทั้งสอง สามารถจะสลับตำแหน่งก่อนหลังได้ทำให้ได้โครงสร้างดังแสดงในรูปที่ 1.2 (a) ซึ่งมีสัญญาณตรง จุกกลางระหว่างทั้งสองส่วนเปลี่ยนไปเป็น $\{u(n)\}$ สมการในแกนเวลาของโครงสร้างนี้จึงเขียนได้เป็น

$$u(n) = \sum_{k=1}^M a_k u(n-k) + x(n) \quad (1.9)$$

และ

$$y(n) = \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k u(n-k) \quad (1.10)$$

ซึ่งเมื่อแปลงให้อยู่ในขอบข่ายของ z - ทรานส์ฟอร์มจะได้ว่า

$$U(z) = X(z) / 1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \quad (1.11)$$

และ

$$Y(z) = U(z) \sum_{k=-N_F}^{N_P} b_k z^{-k} \quad (1.12)$$

โดยการตรวจสอบสัญญาณที่ออกจากตัวหน่วงทุกตัวในรูปที่ 1.2 (a) เราสังเกตว่าบรรดาตัวหน่วงที่อยู่ด้านล่างจะมีสัญญาณเหล่านี้เท่ากัน ฉะนั้นเราจึงลดตัวหน่วงและยุบโครงสร้างให้กระชับขึ้นดังแสดงในรูปที่ 1.2 (b) เราเรียกโครงสร้างนี้ว่าเป็นแบบตรง II เราจะสังเกตว่าแบบตรง II นี้จะใช้จำนวนตัวหน่วงเพียง M หรือ $N_F + N_P$ แล้วแต่ว่าใครจะมากกว่ากันซึ่งน้อยกว่าจำนวนตัวหน่วงในแบบตรง I ซึ่งใช้ถึง $M + N_P + N_F$ เราจึงเห็นได้ว่าสำหรับฟังก์ชันระบบใด ๆ ที่กำหนดมาให้แบบตรง II ใช้จำนวนตัวหน่วงน้อยที่สุด เราจึงกล่าวว่า เป็นโครงสร้างวินัย (canonical structure)

ตัวอย่างที่ 1.1 จงแสดงโครงสร้างแบบตรง II ของวงจรกรองลำดับสองซึ่งมีสมการแตกต่างดังนี้

$$y(n) = 2r \cos(\omega_0) y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n) - r \cos(\omega_0) x(n-1)$$

หรือนั่นคือมีฟังก์ชันระบบ

$$H(z) = \frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

วิธีทำ

แบบตรง I หาได้จากการแยกแฟกเตอร์ฟังก์ชันระบบให้อยู่ในรูปของ

$$Y(z) = H_1(z) H_2(z) X(z)$$

โดยที่ $H_1(z)$ คือเศษและ $H_2(z)$ ก็คือส่วนของ $H(z)$ เรามีสัญญาณตัวกลาง $\{w(n)\}$ ซึ่งมีสัญลักษณ์ของ z -ทรานส์ฟอร์มว่า $W(z)$ และอยู่กลางระหว่าง $H_1(z)$ และ $H_2(z)$ ดังในรูปที่ 1.1 จึงทำให้เขียนได้ว่า

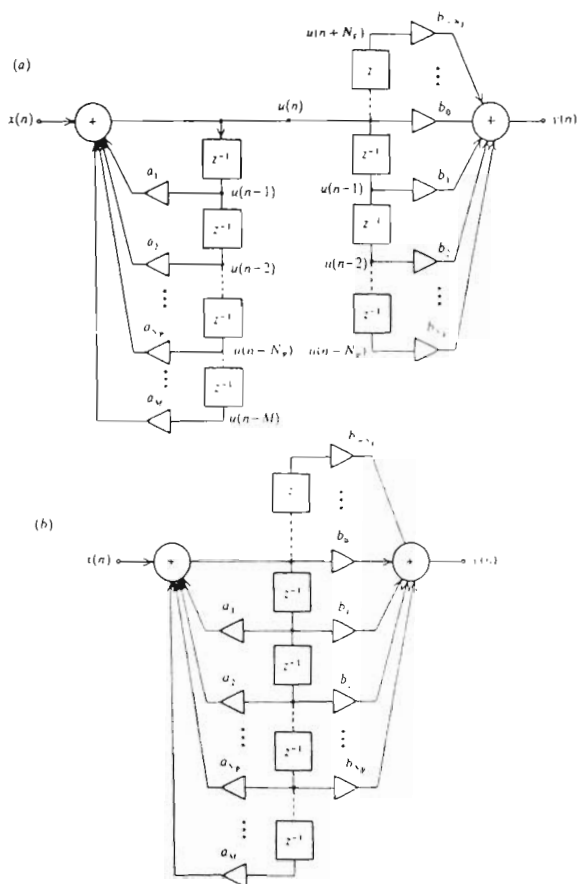
$$H_1(z) = 1 - r \cos(\omega_0) z^{-1} = \frac{W(z)}{X(z)}$$

และ

$$H_2(z) = (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})^{-1} = \frac{Y(z)}{W(z)}$$

ต่อไปเราสลับตำแหน่ง $H_1(z)$ และ $H_2(z)$ ทำให้ได้ว่า

$$Y(z) = H_2(z) H_1(z) X(z)$$



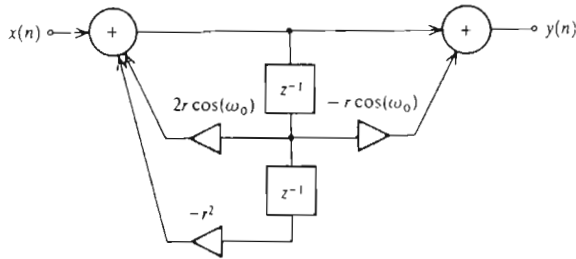
รูป 1.2 แสดงสองขั้นตอนในการ

และเรามีสัญญาณตัวกลางที่สอง $\{u(n)\}$ ซึ่งมีสัญญาณลักษณะ ทราנסฟอร์มว่า $U(z)$ โดยอยู่กลางระหว่าง $H_2(z)$ และ $H_1(z)$ ดังในรูปที่ 1.2 (a) จึงทำให้เขียนได้ว่า

$$H_2(z) = (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})^{-1} = \frac{U(z)}{X(z)}$$

และ

$$H_1(z) = 1 - r \cos(\omega_0) z^{-1} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$



รูป 1.3 โครงสร้างแบบตรง ของวงจรลำดับสองในตัวอย่างที่ 1.1

ซึ่งนำมาเขียนเป็นโครงสร้างแบบตรง II ได้ ดังแสดงในรูปที่ 1.3

โครงสร้างแบบตรง I และ II ดังอธิบายมาแล้วนั้นเป็นลักษณะธรรมดาที่ใช้กันทั้งในกรณีที่เขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์และสร้างเป็นฮาร์ดแวร์ อย่างไรก็ตามโครงสร้างทั้งสองนี้มีจุดอ่อนอยู่ 2 ประการ ประการแรกคือ ขาดความคล่องตัวด้านฮาร์ดแวร์ตรงที่ว่าเมื่อลำดับของวงจรกรอง เปลี่ยนไป องค์ประกอบของฮาร์ดแวร์ต้องเปลี่ยนไปด้วย เพื่อให้คล้องจองกับจำนวนตัวคูณและตัวหน่วงตามลำดับของวงจรมัน ประการที่สอง ความไวของสัมประสิทธิ์อื่นเนื่องจากการปัดเศษทศนิยมของตัวเลขจะเพิ่มขึ้นเมื่อลำดับของวงจรสูงขึ้น การเพี้ยนเพียงเล็กน้อยของตัวเลขสัมประสิทธิ์จะหมายถึงการเพี้ยนของตำแหน่งโพล การเพี้ยนเพียงเล็กน้อยของตำแหน่งโพลที่อยู่ใกล้เส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่ง จะส่งผลให้เกิดการเพี้ยนอย่างมากของการตอบสนองความถี่ของขนาด หรือในกรณีที่เลวร้ายอาจทำให้เกิดความไม่เสถียรได้ เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าวนี้เราจะต้องใช้โครงสร้างซึ่งประกอบด้วยส่วนย่อยที่เป็นลำดับสอง โดยส่วนย่อยเหล่านี้อาจต่อแบบอนุกรมหรือขนานก็ได้ โครงสร้างอนุกรมของส่วนย่อยลำดับสองนี้จะมีข้อที่น่าสังเกตว่าโพลและซีโรของส่วนย่อยลำดับสองที่ต่อเนื่องกันอยู่ก็คือโพลและซีโรของฟังก์ชันระบบรวมทั้งหมดนั่นเอง แต่ในกรณีของโครงสร้างขนานของส่วนย่อยลำดับสองนั้น โพลของส่วนย่อยก็คือโพลของฟังก์ชันระบบรวมแต่ซีโรของระบบย่อยมิใช่ซีโรของฟังก์ชันระบบรวม ทำให้โครงสร้างอนุกรมอาจมีข้อได้เปรียบอยู่บ้างตรงที่ฟังก์ชันระบบรวมจะหาได้โดยง่ายกว่ากรณีโครงสร้างขนาน แต่อย่างไรก็ดีโครงสร้างขนานจะได้เปรียบตรงที่ว่าการประมวลผลจะทำได้ในลักษณะขนาน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการประยุกต์ที่ต้องการอัตราเร็วของการทำงานสูง เพราะเราสามารถจะใช้คอมพิวเตอร์ในแต่ละส่วนย่อยทำงานขนานกันหรือนั่นคือทำงานพร้อม ๆ กันนั่นเอง

1.5 โครงสร้างอนุกรมส่วนย่อยลำดับสอง

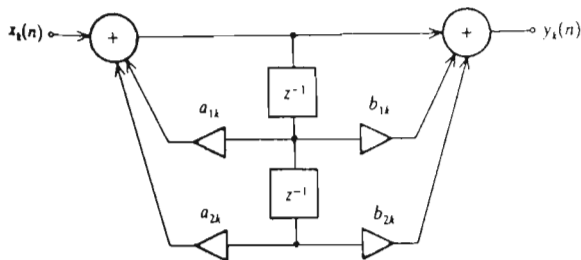
การจัดให้ฟังก์ชันระบบ $H(z)$ ในความสัมพันธ์ (1.3) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมส่วนย่อยลำดับสองทำได้โดยเริ่มจากการแยกแฟกเตอร์ z^{N_F} ซึ่งเป็นจำนวนตัวหน่วงในเศษ เราจึงได้ว่า

$$H(z) = A z^{N_F} \prod_{k=1}^{[M/2]} H_k(z) \quad (1.13)$$

โดยที่

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \quad (1.14)$$

โดยที่ A เป็นค่าเกน (gain) z^{N_F} เป็นส่วนปราศจากเหตุและ $[M/2] = 3$ นอกจากนี้หาก $N_P + N_F > M$ แล้วจำนวน $H_k(z)$ ใน (1.13) จะมีทั้งหมดถึง $[(N_P + N_F)/2]$ แทนที่จะเป็น $[M/2]$



ส่วนที่
4.2.7
176
2535

รูป 1.4 โครงสร้างส่วนย่อยลำดับสอง

เพื่อที่สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองจะได้เป็นค่าจริง เราจะคูณซีโรซึ่งเป็นค่าเชิงซ้อนคอนจูเกตเข้าด้วยกัน และคูณโพลซึ่งเป็นค่าเชิงซ้อนคอนจูเกตเข้าด้วยกันเช่นกัน อันจะทำให้เราได้ส่วนย่อยลำดับสองทั้งในเศษและส่วน นอกจากนี้ซีโรซึ่งเป็นค่าจริงสองค่าก็สามารถคูณกันเพื่อให้ได้ส่วนย่อยลำดับสองในเศษและโพลซึ่งเป็นค่าจริงสองค่าที่สามารถคูณกันเพื่อให้ได้ส่วนย่อยลำดับสองในส่วนเช่นกัน หากจำนวนโพลหรือซีโรเป็นจำนวนคี่ เราจะมีส่วนย่อยลำดับหนึ่ง กล่าวคือมี $b_{2k} = 0$

หรือ $a_{2k} = 0$ อยู่ด้วยหนึ่งในส่วนในบรรดาส่วนย่อยทั้งหลายแต่ละส่วนย่อย $H_k(z)$ ซึ่งเราเรียกว่าเป็นส่วนย่อยลำดับสอง (ซึ่งบางทีเรียกย่อ ๆ ว่า CSOS จากคำเต็ม Cascade second-order section) จะสามารถสร้างในลักษณะแบบตรง II ดังแสดงในรูปที่ 1.4 สมการแตกต่างของส่วนย่อยลำดับสองส่วนที่ k จะเขียนได้ว่าเป็น

$$y_k(n) = a_{1k} y_k(n-1) + a_{2k} y_k(n-2) + x_k(n) + b_{1k} x_k(n-1) + b_{2k} x_k(n-2) \quad (1.15)$$

และเขียนในขอบข่ายของ ทรานส์ฟอร์มได้ว่า

$$Y_k(z) = a_{1k} z^{-1} Y_k(z) + a_{2k} z^{-2} Y_k(z) + X_k(z) + b_{1k} z^{-1} X_k(z) + b_{2k} z^{-2} X_k(z) \quad (1.16)$$

ในการสร้างเป็นวงจรด้วยชิ้นส่วนฮาร์ดแวร์นั้นแต่ละส่วนย่อยจะมีโครงสร้างเดียวกัน จะแตกต่างกันก็เฉพาะสัมประสิทธิ์การคูณซึ่งเราจะเก็บไว้ในหน่วยความจำซึ่งอาจเป็นประเภทรอม (ROM ข้อมาจาก Read Only Memory) การเปลี่ยนจากวงจรกรองหนึ่งไปเป็นอีกวงจรหนึ่งจึงทำได้โดยการเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ในหน่วยความจำเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1.2 จงแสดงโครงสร้างอนุกรมส่วนย่อยลำดับสองของ

$$H(z) = \frac{z^3 + 5/12 + 5z^{-1}/12 + z^{-2}/12}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

วิธีทำ เราแยกแฟกเตอร์ของฟังก์ชันระบบที่ให้มาดังนี้

$$H(z) = \frac{-z^3 (1 + z^{-1}/4) (1 + z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

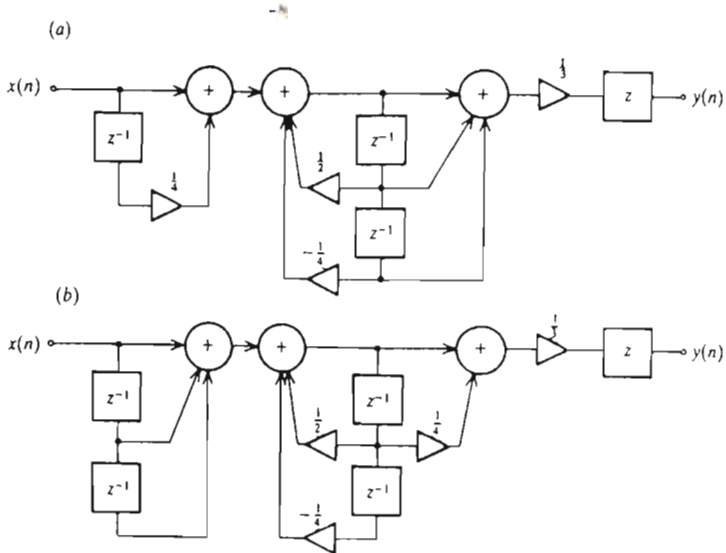
โดยเรายังอาจจัดออกได้เป็น 2 รูปแบบแล้วแต่ว่าเราจะจับคู่ระหว่างส่วนย่อยของเศษกับส่วนย่อยของส่วนอย่างไร รูปแบบแรกได้แก่

$$H(z) = \frac{1}{3} z (1 + z^{-1}/4) \frac{(1 + z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

ซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 1.5 (a) และรูปแบบที่สองได้แก่

$$H(z) = \frac{1}{3} z (1 + z^{-1} + z^{-2}) \frac{(1 + z^{-1}/4)}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

ซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 1.5 (b)



รูป 1.5 แสดงโครงสร้างอนุกรมส่วนย่อยลำดับสองที่เป็นไปได้ 2 รูปแบบของตัวอย่างที่ 1.2

การ ประหยัค ซึ่น ส่วน ฮาร์ดแวร์ ด้วย วงจร อัศราเร็วสูง โครงสร้างอนุกรมส่วนย่อย ลำดับ สองสามารถช่วยประหยัคจำนวนซึ่นส่วนฮาร์ดแวร์ที่ใช้ได้ เราจะลองพิจารณาจากที่ว่าการทํางาน 1 ครั้ง ของส่วนย่อยลำดับสองดังแสดงในรูปที่ 1.4 จะประกอบด้วยการคูณ 4 ครั้ง และการบวก 2 ครั้ง สมมติให้การทำงาน 1 ครั้ง ดังกล่าวนี้อัศเวลา T_P วินาที และหากให้ T_S วินาที เป็นช่วงเวลาก่อนที่ค่าอัศไปจะถูกป้อนเข้าสู่ส่วนย่อยดังกล่าว โดยปกติแล้ว $T_P < T_S$ ซึ่งเราจะต้อง สร้างโดยใช้ส่วนย่อยลำดับสองอนุกรมกันหลายส่วนเพื่อให้ได้วงจรกรองอัศตอลลำดับสูง ๆ

อย่างไรก็ดีหาก T_P น้อยกว่า T_S มาก ๆ ฮาร์ดแวร์จะทำงานเร็วจนกระทั่งใช้เวลาส่วนใหญ่รอข้อมูลค่าถัดไป ในกรณีเช่นนี้ เราสามารถใช้ส่วนย่อยเพียงส่วนเดียวทำงานแทนทุกส่วนย่อยอื่นได้ กล่าวคือ ถ้า $T_P \ll T_S$ แล้วข้อมูลที่เข้ามาจะถูกประมวลด้วยฮาร์ดแวร์ส่วนย่อยดังกล่าวซึ่งใช้สมบัติของส่วนแรก ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกนำไปเก็บไว้ในหน่วยความจำแรม (RAM ย่อจาก Read/Write Memory) จากนั้นค่าสมบัติส่วนที่สองซึ่งเก็บไว้ในหน่วยความจำแรม ก็จะป้อนนำไปแทนที่สมบัติเดิมในฮาร์ดแวร์ส่วนย่อยเดียวกันนี้ ตอนนี้ฮาร์ดแวร์ส่วนย่อยดังกล่าวก็จะทำหน้าที่เป็นส่วนที่สอง ผลลัพธ์แรกที่เก็บไว้ในแรมก็จะถูกป้อนให้เป็นข้อมูลเข้าและผลลัพธ์ที่ได้ก็จะนำกลับไปเก็บในแรมเพื่อเตรียมเป็นข้อมูลที่จะป้อนให้ส่วนที่สาม ซึ่งก็ต่อจะเป็นฮาร์ดแวร์ส่วนย่อยเดียวกันนี้แต่สมบัติจะถูกเปลี่ยนไปเป็นค่าของส่วนที่สาม กระบวนการนี้จะถูกทำซ้ำเช่นนี้จนครบทุกส่วนย่อยของระบบ ฉะนั้นจะเห็นว่าโดยการใช้ฮาร์ดแวร์เดียวกันแต่จะทำงานได้เสมือนหนึ่งว่ามีครบทุกส่วนย่อย เราจะศึกษาตัวอย่างเพื่อให้เข้าใจมากขึ้นดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.3 โทรศัพท์ที่คุณภาพของเสียงจะมีความถี่ระหว่าง 300 และ 3500 เฮิรตซ์ อัตราการสุ่มที่ใช้ทั่วไปจะประมาณ 8 กิโลเฮิรตซ์ หรือนั่นคือ $T_S = 125$ ไมโครวินาที หากเราจะประมวลผลสัญญาณโทรศัพท์นั้นในเวลาจริงโดยใช้วงจรกรองดิจิทัลซึ่งมีโครงสร้างอนุกรมส่วนย่อยลำดับสองโดยใช้ฮาร์ดแวร์เพียงส่วนเดียวทำงานซ้ำ ๆ กันแล้ว $[M/2]$ จะต้องน้อยกว่า T_S/T_P ด้วยเทคโนโลยีปัจจุบัน เราทราบว่า $T_P < 1$ ไมโครวินาที เพราะฉะนั้น $T_S/T_P > 100$ ฉะนั้นเราจะสร้างวงจรเป็นฮาร์ดแวร์เพียงส่วนเดียวได้ โดยปกติลำดับของวงจรที่ใช้จะไม่เกิน 12 ซึ่งจะเห็นว่าเป็นไปได้โดยสะดวก

เมื่อ $T_S/T_P \gg [M/2]$ ดังตัวอย่างนี้แล้วเราจะพบว่ามิเพียงแต่จะใช้ฮาร์ดแวร์ส่วนเดียวทำงานแทนทุกส่วนย่อยเท่านั้นแต่การทำงานจะเร็วพอจนมีเวลาเหลือที่จะไปประมวลผลให้กับเสียงโทรศัพท์ในช่องอื่นด้วยกล่าวคือ ในกรณีนี้สามารถจะทำงานได้ถึง 16 ช่องเสียง ซึ่งเป็นการใช้ฮาร์ดแวร์ที่ประหยัดมาก

1.6 โครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสอง

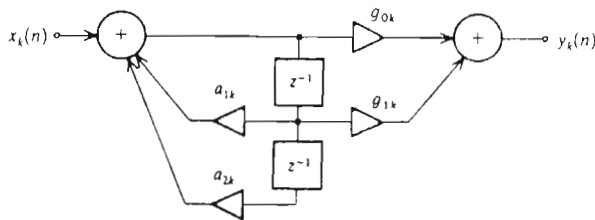
โครงสร้างอีกรูปแบบหนึ่งที่เป็นประโยชน์ต่อการสร้างวงจรกรองดิจิทัลได้แก่ การต่อขนานส่วนย่อยลำดับสอง (ซึ่งบางทีเรียกว่า PSOS ย่อมาจาก Parallel Second-order sections) รูปแบบนี้จะพื้นฐานให้เราเข้าใจโครงสร้างสู่ความถี่ที่จะอธิบายในคอนทักซ์ของบทนี้ หาก $M \geq N_P + N_F$ แล้วเราจะเขียน $H(z)$ ในรูปของโครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสองได้ดังนี้

$$H(z) = z^{N_F} \sum_{k=1}^{[M/2]} G_k(z) \quad (1.17)$$

โดยที่ ซิมเพิลเมทริกซ์

$$G_k(z) = \frac{g_{0k} + g_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$



รูป 1.6 ส่วนหนึ่งของโครงสร้างส่วนย่อยลำดับสอง

และ $[.]$ จะหมายถึงเลขจำนวนเต็มถัดไปที่สูงกว่า รูปแบบของโครงสร้างนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 1.6 หาก $N_P + N_F > M$ แล้ว เราต้องใช้ $[(N_P + N_F)/2]$ แทน $[M/23]$ ใน (1.17) สมการแตกต่างของส่วนย่อยที่ k จะเขียนได้ว่า

$$y_k(n) = a_{1k} y_k(n-1) + a_{2k} y_k(n-2) + g_{0k} x_k(n) + g_{1k} x_k(n-1) \quad (1.18)$$

จะเขียนในขอบข่ายของ z-ทรานส์ฟอร์มได้ว่า

$$Y_k(z) = a_{1k} z^{-1} Y_k(z) + a_{2k} z^{-2} Y_k(z) + g_{0k} X_k(z) + g_{1k} z^{-1} X_k(z) \quad (1.19)$$

โพลในโครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสองใน (1.17) นี้จะเป็นกลุ่มเดียวกับโพลในโครงสร้างอนุกรมส่วนย่อยลำดับสองใน (1.14) แต่เราจะสังเกตว่าส่วนย่อยหนึ่งส่วนจะมีซีโรเพียงตัวเดียว ซึ่งแตกต่างจากในกรณีโครงสร้างอนุกรมลำดับสองที่ส่วนย่อยแต่ละส่วนจะมีซีโรคอนจูเกตหนึ่งคู่

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาโครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสองของฟังก์ชันระบบเดียวกับในตัวอย่างที่ 1.2 กล่าวคือ

$$H(z) = \frac{z/3 + 5/12 + 5z^{-1}/12 + z^{-2}/12}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

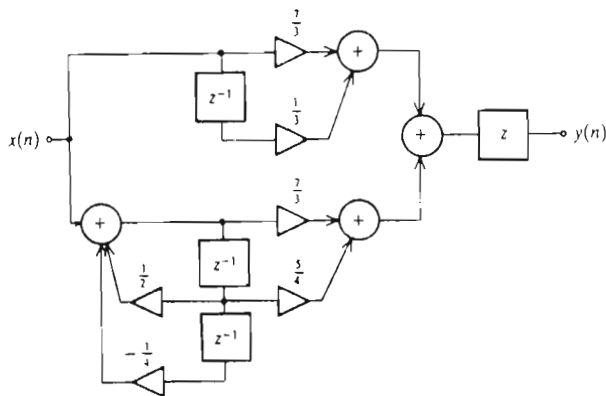
วิธีทำ ก่อนอื่นเราดึงส่วนที่ปราศจากเหตุออกมาก่อนทำให้ได้ว่า

$$H(z) = \frac{z(1/3 + 5z^{-1}/12 + 5z^{-2}/12 + z^{-3}/12)}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4}$$

จากนั้นเพื่อให้ได้ $G_k(z)$ ในความสัมพันธ์ (1.17) เราหารเศษด้วยส่วนทำให้ได้ว่า

$$H(z) = z \left[\frac{7}{3} + \frac{z^{-1}}{3} + \frac{7/3 + 5z^{-1}/4}{1 - z^{-1}/2 + z^{-2}/4} \right]$$

และเขียนเป็นโครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสองได้ ดังแสดงในรูปที่ 1.7



รูป 1.7 โครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสองของตัวอย่างที่ 1.4

รูปแบบโครงสร้างทั้งอนุกรมและขนานดังกล่าวมาข้างต้นสามารถใช้สร้างวงจรกรองดิจิทัลทั้งแบบรีเคอร์ซีฟและนอร์รีเคอร์ซีฟ สำหรับวงจรกรองดิจิทัลที่ค่าตอบสนองค่าหนึ่งมีจำนวนสิ้นสุดรูปแบบอื่นที่จะอธิบายในตอนต่อไปจะมีข้อได้เปรียบกว่าบางประการ

1.7 โครงสร้างวงจรกรองดิจิทัลที่มีเฟสเชิงเส้น

ตามที่เคยทราบมาจากในบทก่อน ๆ แล้วว่า วงจรกรองดิจิทัลที่มีเฟสเชิงเส้นนั้นการตอบสนองค่าหนึ่งต้องเป็นสมมาตรคู่หรือสมมาตรคี่รอบจุดใดจุดหนึ่งในแกนเวลา เนื่องจากสมบัติของวงจรกรองดิจิทัลเอพ็อลาร์ก็ถือค่าของการตอบสนองค่าหนึ่งนั่นเอง และจากความสมมาตรจึงทำให้มีตัวคูณเป็นคู่ ๆ ที่มีสมบัติเหมือนกัน เพื่อที่จะลดจำนวนตัวคูณ เราจะรวมสัญญาณเข้าของตัวคูณแต่ละคู่เข้าด้วยกันแล้วจึงทำการคูณ วิธีการดังกล่าวนี้ ทำให้สามารถลดจำนวนตัวคูณลงได้ประมาณครึ่งหนึ่ง เนื่องจากการคูณเป็นปฏิบัติการที่เปลืองเวลามากที่สุดในการทำงานของวงจรกรองดิจิทัล การลดตัวคูณลงได้จึงเป็นการลดเวลาการทำงานลงไปด้วย ซึ่งอาจช่วยให้เกิดการทำงานในเวลาจริง (real time) มากขึ้น

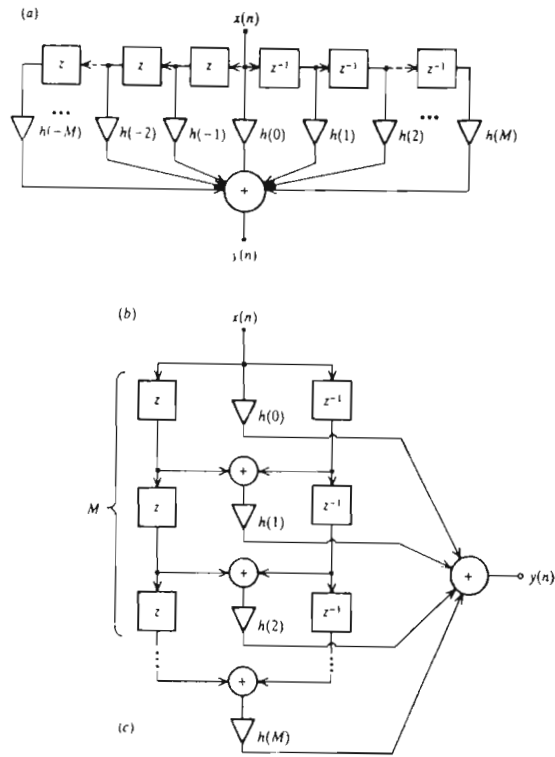
เพื่อให้เข้าใจมากขึ้นเราจะลองพิจารณาวงจรกรองดิจิทัลเอพ็อลาร์ที่ปราศจากเหตุซึ่งมีจำนวนค่าตอบสนองค่าหนึ่งเป็นจำนวนคู่อยู่ระหว่าง $-M \leq n \leq M$ ดังนั้นเราจะได้ฟังก์ชันระบบว่า

$$H(z) = \sum_{n=-M}^M h(n) z^{-n} \quad (1.20)$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นโครงสร้างแบบตรง I ได้ดังแสดงในรูปที่ 1.8 (a) เราจะสังเกตว่าโครงสร้างนี้ต้องการตัวคูณจำนวน $2M + 1$ สำหรับกรณีที่จำนวนตอบสนองค่าหนึ่งเป็นจำนวนคู่เราสามารถจะรวมสมบัติที่เหมือนกันทำให้ได้ว่า

$$H(z) = h(0) \sum_{n=1}^M h(n) [z^n + z^{-n}] \quad (1.21)$$

ซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 1.8 (b) โดยผลรวมของสัญญาณออกจากตัวหน่วงหนึ่งจะนำไปคูณกับ $h(n)$ โครงสร้างนี้ต้องการตัวคูณเพียง $M + 1$ เท่านั้นเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เดียวกับโครงสร้างในรูปที่ 1.8 (a)



รูป 1.8 (a) โครงสร้างนรีเคอร์ซีฟแบบตรงของวงจรตรงดิจิทัล นรีเคอร์ซีฟปราศจากเหตุ
(b) โครงสร้างของวงจรดิจิทัลเอ็ฟไออาร์ซึ่งมีเฟสเชิงเส้นและปราศจากเหตุใน
โครงสร้างที่สามารถลดตัวคูณลงไปประมาณครึ่งหนึ่งของใน (a)

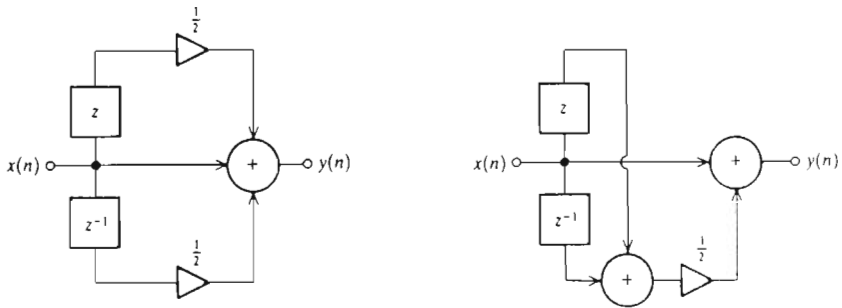
ตัวอย่างที่ 1.5 อินเตอร์โพลเลเตอร์ (interpolator) เชิงเส้นปราศจากเหตุมีฟังก์ชันระบบ

$$H(z) = z/2 + 1 + z^{-1}/2$$

สามารถสร้างในรูปแบบตรงดังแสดงในรูปที่ 1.9 และโดยการใช้ประโยชน์จากสมมาตรคู่ของค่าตอบ
สนองค่าหนึ่งเราเขียนได้ว่า

$$H(z) = 1 + [z + z^{-1}]/2$$

ซึ่งสามารถจะสร้างได้โดยใช้ตัวคูณเพียงตัวเดียวดังแสดงในรูปสองของรูปที่ 1.9



รูป 1.9 โครงสร้าง 2 แบบของวงจรกรองคัตออฟไออาร์มีเฟสเชิงเส้น และปราศจากเหตุในตัวอย่างที่ 1.5

ในกรณีวงจรกรองคัตออฟไออาร์เชิงเหตุเราก็สามารถใช้หลักการเดียวกันดังที่อธิบายมาข้างต้นของกรณีวงจรกรองคัตออฟไออาร์ปราศจากเหตุ กล่าวคือ ตัวหน่วงที่มีสัมประสิทธิ์เท่ากันจะถูกนำมารวมก่อนที่จะนำไปคูณดังตัวอย่างต่อไปนี้

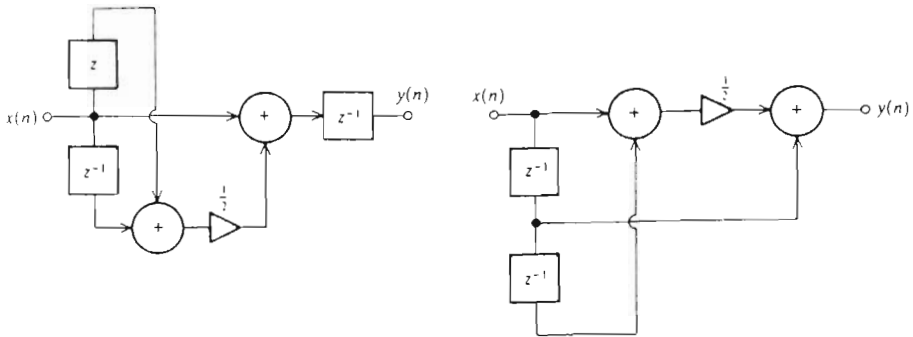
ตัวอย่างที่ 1.6 อินเตอร์โพลเตอร์เชิงเส้นและเชิงเหตุด้วยมีฟังก์ชันระบบ

$$H(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$$

ซึ่งเมื่อรวมตัวหน่วงที่มีสัมประสิทธิ์เหมือนกันจะได้ว่า

$$H(z) = z^{-1} + [1 + z^{-2}]/2$$

และสร้างเป็นวงจรดังแสดงในโครงสร้างรูปที่ 1.10



รูป 1.10 โครงสร้างของวงจรกรองดิจิทัลเอ็ฟไออาร์มีเฟสเชิงเส้นและเชิงเหตุด้วย

1.8 โครงสร้างสู่ความถี่สำหรับวงจรกรองดิจิทัลเอ็ฟไออาร์

ในตอนนี้เราจะศึกษาโครงสร้างอีกแบบหนึ่งในการสร้างวงจรกรองดิจิทัลเอ็ฟไออาร์ โครงสร้างนี้น่าสนใจตรงที่ว่าจะเป็นการต่ออนุกรมระหว่างวงจรกรองนรีเคอร์ซีฟตัวหนึ่งกับวงจรกรองรีเคอร์ซีฟอีกหนึ่งแฉว เพื่อทำให้เกิดการตอบสนองค่าหนึ่งทีสิ้นสุด ด้วยการที่วงจรโดยรวมแล้วให้การตอบสนอง ค่าหนึ่งที่สิ้นสุดดังนั้นตามนิยามแล้ว วงจรโดยรวมแล้วจึงเป็นวงจรเอ็ฟไออาร์ถึงแม้ว่าในโครงสร้างของมันส่วนหนึ่งจะเป็นรูปแบบรีเคอร์ซีฟก็ตาม

เราจะทำการศึกษาโดยพิจารณาโครงสร้างแบบง่าย ที่มีลำดับหนึ่งและสองก่อน จากนั้นจึงจะเพิ่มให้ซับซ้อนมากขึ้น จนในที่สุดทำให้ได้รูปแบบของลำดับใด ๆ ของวงจรกรองเอ็ฟไออาร์

วงจรกรองเอ็ฟไออาร์เชิงเหตุซึ่งค่าตอบสนองค่าหนึ่งเท่ากันทุกค่าจะเขียนได้ว่า

$$h_0(n) = \begin{cases} G_0/N & \text{สำหรับ } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{สำหรับในกรณีอื่น ๆ} \end{cases} \quad (1.22)$$

ซึ่งโดยการหา z - ทรานส์ฟอร์มของ (1.22) ทำให้ได้ฟังก์ชันระบบเป็น

$$H_0(z) = \frac{G_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \quad (1.23)$$

และโดยใช้สูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตทำให้เขียน (1.23) ได้เป็น

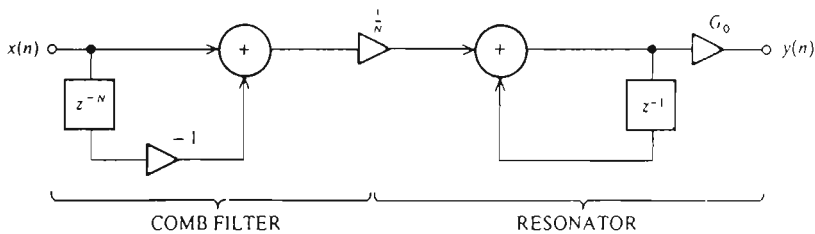
$$H_0(z) = \frac{G_0 1 - z^{-N}}{N 1 - z^{-1}} \tag{1.24}$$

ซึ่ง (1.24) นี้ทำให้เกิดแนวความคิดใหม่ในการจัดรูปแบบโครงสร้าง กล่าวคือเป็นการอนุกรมดังแสดงในรูปที่ 1.11 และเราสามารถเขียนฟังก์ชันระบบการอนุกรมนี้ว่า

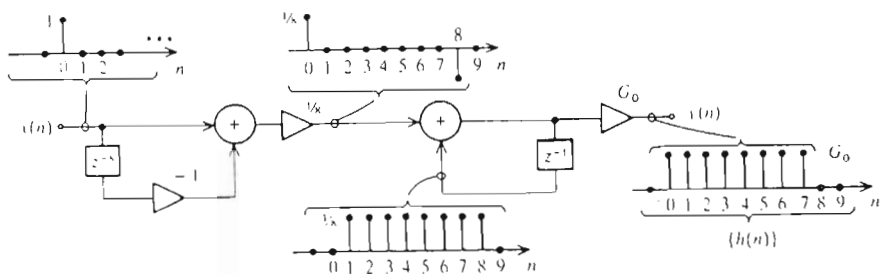
$$H_0(z) = H_c(z) H_{R,o}(z) \tag{1.25}$$

$$H_c(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N}$$

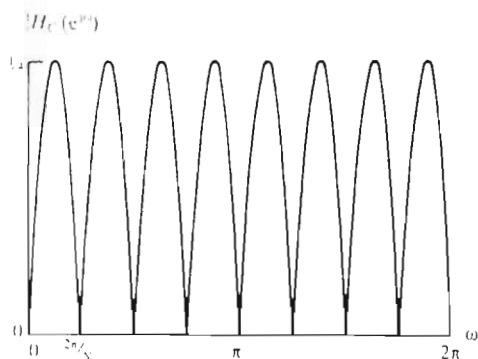
$$H_{R,o}(z) = \frac{G_0}{1 - z^{-1}}$$



รูป 1.11 วงจรกรองหัวค้อนอนุกรมตามด้วยวงจรกำรเพื่อสร้างวงจรกรองเอ็ฟไออาร์



รูป 1.12 การสร้างวงจรกรองเอ็ฟไออาร์โดยใช้วงจรกรองหัวคี่อนุกรมกับวงจรกำร



รูป 1.13 การตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรกรองหัว กรณี $N=8$

$H_C(z)$ เป็นฟังก์ชันระบบของที่เรียกว่า วงจรกรองหัว (comb filter) ซึ่งเราจะทราบที่ มาของชื่อนี้ในไม่ช้า วงจรกรองหัวมีค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวน $(N+1)$ ค่า ซึ่งมีเพียงสองค่าเท่านั้น ที่ไม่เป็นศูนย์ กล่าวคือ $h(0) = 1/N$ และ $h(N) = -1/N$ ดังแสดงในรูปที่ 1.12 กรณี $N = 8$ และทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของมันจะเขียนได้เป็น

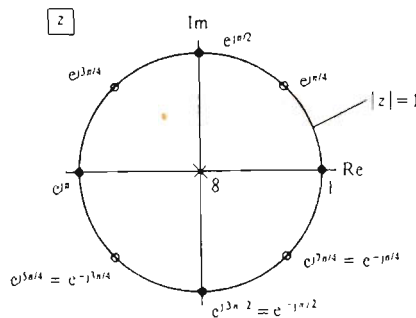
$$\begin{aligned}
 H_C(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-jN\omega}}{N} \\
 &= \frac{2j}{N} e^{-jN\omega/2} \sin(N\omega/2)
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

ซึ่งเป็นลักษณะไซน์ (sinusoidal) และแสดงเฉพาะการตอบสนองความถี่ของขนาดได้ดังในรูปที่ 1.13 กรณี $N = 8$ $H_C(e^{j\omega})$, มีซีโรจำนวน N ตัว ระหว่าง $0 \leq \omega \leq 2\pi$ โดยที่ซีโรเหล่านี้จะมีระยะห่างระหว่างตัวเองเท่ากัน เนื่องจากการตอบสนองความถี่ของขนาดมีลักษณะคล้ายห้วงจรกรอนี้จึงได้ชื่อว่า วงจรกรอนี้ ฟังก์ชันระบบของวงจรนี้สามารถจะเขียนเพื่อแสดงตำแหน่งโพลและซีโรได้ดังนี้

$$H_C(z) = \frac{1}{N} \prod_{k=0}^{N-1} (1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}) \quad (1.27)$$

อันเป็นการแสดงว่ามีซีโร N ตัว กระจายอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย โดยซีโรตัวที่หนึ่งอยู่ที่ $z = 1$ และโพลทั้งหมดอยู่ที่ $z = 0$ ดังแสดงในรูปที่ 1.14 สำหรับกรณี $N = 8$

$H_{R,k}(z)$ เป็นฟังก์ชันระบบของวงจรการ (resonator) หรือนั่นคือวงจรกรองดิจิทัลซึ่งมีโพลบนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยที่ความถี่ $\omega_k = 2\pi k/N$ ดังนั้น $H_{R,0}(z)$ จึงเป็นตัวการที่ความถี่ $\omega = 0$ หรือนั่นคือมีโพลที่ $z = 1$ เนื่องจากโพลดังกล่าวนี้มีไคอยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยโดยแท้จริง ดังนั้นวงจรการนี้จึงไม่เสถียรในลักษณะที่ว่าค่าตอบสนองค่าหนึ่งจะไม่ลดลงเป็นศูนย์ประโยชน์ที่สำคัญของวงจรนี้คือการนำไปสร้างเป็น ตัวกำเนิดความถี่ (oscillator)



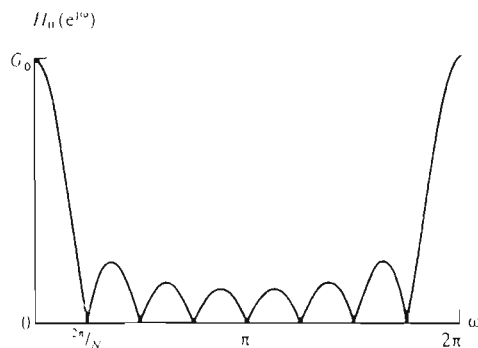
รูป 1.14 ตำแหน่งโพลและซีโรของวงจรกรอนี้ เมื่อ $N=8$

เมื่อเรานำวงจรการไปต่ออนุกรมกับวงจรห้วงแล้ว ซีโรของวงจรห้วงที่ตำแหน่ง $z = 1$ จะหักล้างกับโพลของวงจรการที่ตำแหน่ง $z = 1$ ทำให้ห้วงจรโดยรวมกันแล้วมีความเสถียรทั้งนี้เพราะวงจรโดยรวมให้ค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่สิ้นสุดด้วย

ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรทั้งสองเมื่อรวมกันแล้วจะเขียนได้ว่าเป็น

$$\begin{aligned}
 H_0(e^{j\omega}) &= \frac{G_0 1 - e^{-j\omega N}}{N 1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{G_0 1}{N} e^{j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

ดังแสดงในรูปที่ 1.15 กรณี $N = 8$ กล่าวคือ $|H_0(e^{j\omega})|$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ G_0 ที่ $\omega = 0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $\omega_k = 2\pi k/N$ โดย $1 \leq k \leq N-1$ ด้วยเหตุนี้เราสามารถจะกำหนดให้ขนาดที่ $\omega = 0$ มีค่าเป็น G_0 ใด ๆ ได้โดยไม่กระทบขนาดที่ ω_k อื่น ๆ เพราะจะยังคงมีค่าเป็นศูนย์ เราจะใช้คุณลักษณะนี้ในการต่อวงจรการเพิ่มขึ้นในลักษณะขนานกับ $H_{R,0}(z)$ เพื่อตั้งระดับขนาดที่ ω_k อื่นให้เป็นไปตามที่เราต้องการ



รูป 1.15 การตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรกรองหีรวมกับวงจรการ เมื่อ $N = 8$

พฤติกรรมของวงจรโดยรวมกันแล้วนี้จะสามารถอธิบายในขอบข่ายของเวลาได้ด้วย ดังแสดงในรูปที่ 1.12 กล่าวคือ ค่าไม่เป็นศูนย์ที่ตำแหน่ง $n = 0$ ตรงจุดสัญญาณออกของวงจรกรองหีจะ เป็นพลังงานที่ไปกระตุ้นให้วงจรการทำงาน เนื่องจากวงจรการมีคุณลักษณะสำคัญที่ว่าสมบัติ การป้อนกลับเท่ากับหนึ่งจึงสามารถทำงานโดยปราศจากการสูญเสียพลังงาน โดยเหตุนี้เองสัญญาณ ออกของวงจรการจึงมีระดับคงที่ไปเรื่อยจนกระทั่ง วงจรกรองหีปลดปล่อยพลังงานออกจากวงจรการ โดยการป้อนค่าไม่เป็นศูนย์ที่ $n = N$ ให้แก่วงจรการ ฉะนั้นสรุปโดยรวมแล้ววงจรทั้งสองที่ต่อ อนุกรมกันจะให้สัญญาณออกเป็นลักษณะสี่เหลี่ยมจำนวน N ค่าดังตัวอย่างที่ แสดงในรูปที่ 1.12

ต่อไปเราจะลองเพิ่มวงจรกำรซึ่งมีโพลเชิงซ้อนอยู่ที่ความถี่ $\omega_1 = 2\pi/N$ ซึ่งตรงกับตำแหน่งซีโรตัวถัดไปของวงจรกรองหี ฟังก์ชันระบบของวงจรกำรนี้เขียนได้ว่าเป็น

$$H_{R,1}(z) = \frac{G_1}{1 - e^{j2\pi/N} z^{-1}} \quad (1.29)$$

โดยที่ G_1 เป็นค่าระดับเชิงซ้อนหรือบางทีก็เรียกว่าค่าแกนเชิงซ้อน (Complex-Valued gain) ค่า G_1 นี้เราสามารถกำหนดให้เท่ากับ ค่าเชิงซ้อนของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่ปรารภรณา $H(e^{j\omega})$ ที่ $\omega = 2\pi/N$ หรือ

$$G_1 = H(e^{j2\pi/N}) \quad (1.30)$$

เพื่อที่จะให้ได้สัมประสิทธิ์ค่าจริง เราจำเป็นต้องมีวงจรกำรตัวที่สองซึ่งโพลของมันเป็นคอนจูเกทของ $H_{R,1}(z)$ โพลของวงจรกำรตัวที่สองนี้จะหักล้างซีโรที่ $(N-1)$ ของวงจรกรองหีฟังก์ชันระบบของวงจรกำรตัวที่สองนี้เขียนได้ว่าเป็น

$$H_{R,N-1}(z) = \frac{G_{N-1}}{1 - e^{j2\pi/N} z^{-1}} \quad (1.31)$$

โดยที่ G_{N-1} เป็นค่าแกนเชิงซ้อนเท่ากับ $H(e^{j\omega})$ ที่ปรารภรณาที่ $\omega = 2\pi(N-1)/N = -2\pi/N$ (ดูรูปที่ 1.14) จากที่เคยทราบมาก่อนแล้วว่าทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่ค่าตอบสนองค่าหนึ่งเป็นค่าจริง จะมีคุณสมบัติที่ว่า

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega}) \quad (1.32)$$

นั่นคือ $G_{N-1} = G_1^*$ ทำให้เมื่อนำวงจรกำรสองตัวนี้มาต่อขนานกันจะรวมกันเป็นฟังก์ชันระบบดังนี้

$$\begin{aligned}
 H_{R,1}(z) + H_{R,N-1}(z) &= \frac{G_{-1}}{1 - e^{j2\pi/N} z^{-1}} + \frac{G_{N-1}}{1 - e^{j2\pi/N} z^{-1}} \\
 &= \frac{G_1 + G_1^* - [G_1 e^{-j2\pi/N} + G_1^* e^{j2\pi/N}] z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi/N) z^{-1} + z^{-2}} \\
 &= \frac{2 \operatorname{Re}[G_1] - 2 \operatorname{Re}[G_1 e^{-j2\pi/N}] z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi/N) z^{-1} + z^{-2}} \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

ซึ่งก็คือวงจรลำดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าจริง

วิธีการดังกล่าวมานี้เราสามารถขยายให้รวมไปถึงวงจรการเชิงซ้อนอื่น ซึ่งโพลของมันอยู่ตรงกับตำแหน่งซีโรอื่น ๆ ของวงจรกรองหีได้ทุกซีโร จากนั้นหากนำวงจรเหล่านี้มาต่อขนานกัน ทั้งหมดแล้วจึงต่ออนุกรมเข้ากับวงจรกรองหีเราจะได้ฟังก์ชันระบบรวมกันเป็น

$$H_T(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{G_k}{1 - e^{-j2\pi k/N} z^{-1}} \quad (1.34)$$

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดอินเตอร์โพลเดเตอร์เชิงเส้น และเชิงเหตุด้วยซึ่งมีค่าตอบสนองค่าหนึ่ง ดังนี้

$$h(0) = \frac{1}{2}, \quad h(1) = 1, \quad h(2) = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad h(n) = 0$$

จงหาโครงสร้างกลุ่มความถี่ของวงจรกรองนี้

วิธีทำ เราหาทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของอินเตอร์โพลเดเตอร์นี้ได้ว่าเป็น

$$H(e^{j\omega}) = (1 + \cos(\omega)) e^{-j\omega}$$

เนื่องจากการตอบสนองค่าหนึ่งมีจำนวน 3 ค่า เราจะเลือก $N = 3$ ทำให้ได้ฟังก์ชันระบบของวงจรกรองหีว่าเป็น

$$H_c(z) = (1 - z^{-3})/3$$

ซึ่งมีซีโร 3 ตัวที่ตำแหน่ง $z=e^{j2\pi k/3}$ โดย $k=0, 1$ และ 2 จากนั้นเราหาค่าเกินของ
 วงจรการที่หักล้างกับซีโรทั้ง 3 ตัวนี้ว่าเป็น

$$G_0 = H(e^{j0}) = 2$$

$$G_1 = H(e^{j2\pi/3}) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi/3}$$

$$G_2 = H(e^{j4\pi/3}) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi/3}$$

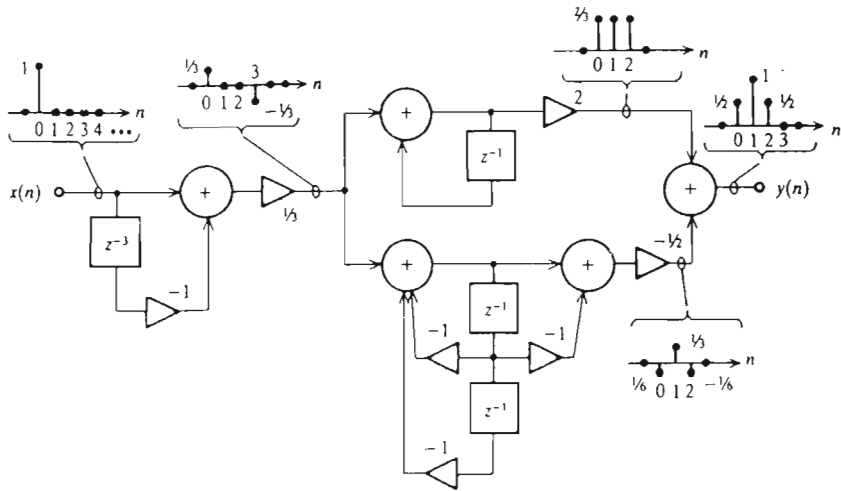
เราสังเกตว่า G_0 เป็นค่าจริง และ $G_2 = G_1^*$ ฟังก์ชันระบบของวงจรลำดับหนึ่งค่าจริง
 จึงเขียนได้ว่าเป็น

$$H_{R,0}(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

และฟังก์ชันระบบของวงจรลำดับสองจะหาได้จากการต่อขนานของวงจรลำดับหนึ่งเชิงซ้อน
 ดังนี้

$$\begin{aligned} H_{R,1}(z) + H_{R,2}(z) &= \frac{\frac{1}{2} e^{-j2\pi/3}}{1 - e^{j2\pi/3} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} e^{j2\pi/3}}{1 - e^{j2\pi/3} z^{-1}} \\ &= \frac{2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} e^{-j2\pi/3} \right] - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} e^{-j4\pi/3} \right] z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi/3) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{\cos(2\pi/3) - \cos(4\pi/3) z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi/3) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}(1 - z^{-1})}{1 + z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ของวงจรลำดับสองที่ได้รับจะมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าจริง โครงสร้างของ
 วงจรกรองแสดงอยู่ในรูปที่ 1.16 ค่าตอบสนองค่าหนึ่งของแต่ละวงจรย่อย และวงจรโดยรวมก็แสดงไว้
 ในรูปดังกล่าวด้วย ซึ่งเราจะพบว่าค่าตอบสนองค่าๆ หนึ่งของวงจรโดยรวมจะเท่ากับค่าปรารถนาในโจทย์



รูป 1.16 การสร้างวงจรกรองดิจิทัลเพื่ออาร์ด้วยโครงสร้างส่วนความถี่

1.9 สรุป

ในบทนี้เราได้ศึกษาโครงสร้างวงจรกรองดิจิทัลหลายรูปแบบ เราเริ่มโดยการให้นิยามสมการพรรณาระบบทั้งสมการคอนโวลูชัน สมการแตกต่างและ z - ทรานส์ฟอร์ม จากนั้นจึงทำความเข้าใจการสร้างวงจรกรองดิจิทัลจากสมการเหล่านี้วงจรกรองดิจิทัลไออาร์ซึ่งมีทั้งโพลและซีโรสามารถใช้โครงสร้างแบบตรง I ซึ่งได้จากสมการแตกต่างหรือฟังก์ชันระบบโดยตรงส่วนแบบตรง II จะเป็นการดัดแปลงจากแบบตรง I เพื่อลดจำนวนตัวหน่วงลงอย่างไรก็ดี โครงสร้างแบบตรงมีจุดอ่อนตรงที่มีความไวต่อตัวเลขของสัมประสิทธิ์ที่สูง ฉะนั้นเราจึงใช้โครงสร้างอนุกรมส่วนย่อยลำดับสอง และโครงสร้างขนานส่วนย่อยลำดับสองเพื่อลดจุดอ่อนดังกล่าวลง ขณะเดียวกันโครงสร้างส่วนย่อยลำดับสองและขนานส่วนย่อยลำดับสองยังมีข้อดีตรงที่ฮาร์ดแวร์มีความคล่องตัวต่อการปรับอีกด้วย ส่วนวงจรกรองดิจิทัลเอพไออาร์ซึ่งมีเฟสเส้นจะสามารถสร้างโดยการลดจำนวนการคูณลงประมาณครึ่งหนึ่งของโครงสร้างปกติ อีกโครงสร้างหนึ่งที่นิยมในการสร้างวงจรกรองดิจิทัลเอพไออาร์คือ โครงสร้างส่วนความถี่

บทที่ 2

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลไอไออาร์

(Infinite Impulse Response Filter Design Techniques)

2.1 บทนำ

ไอไออาร์มาจากภาษาอังกฤษ IIR ซึ่งย่อมาจากคำว่า Infinite Impulse Response ซึ่งแปลว่า การตอบสนองสัญญาณอิมพัลส์ถึงอนันต์ทั้งนี้เพราะวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทนี้มีคุณสมบัติประจำตัวที่สำคัญคือ หากเราป้อนสัญญาณอิมพัลส์ให้แก่วงจรนี้แล้ว สัญญาณตอบสนองจะไม่สิ้นสุดแต่จะมีไปจนถึงอนันต์ ซึ่งจะต่างกับวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลอีกประเภทหนึ่งที่เรารู้จักว่า วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดเอฟไออาร์ ซึ่งคำว่าเอฟไออาร์ มาจากภาษาอังกฤษ FIR ย่อมาจากคำว่า Finite Impulse Response กล่าวคือ เมื่อป้อนสัญญาณอิมพัลส์ให้วงจรกรองสัญญาณประเภทนี้แล้ว สัญญาณตอบสนองที่ได้รับจะสิ้นสุดหรือนั่นคือมีไม่ถึงอนันต์

สำหรับในบทนี้เราจะทำความเข้าใจเรื่องการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลไออาร์ ซึ่งในหลักการเราจะพบว่ก็คือการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก (analog filter design) นั่นเอง แต่มีส่วนที่เพิ่มเติมคือการแปลงฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก ให้กลายเป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล กล่าวให้ชัดเจนลงไปคือปฏิกิริยาของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรลาปลาซ (Laplace variables) ขณะที่วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร z ฉะนั้นเราจะต้องเรียนรู้การแปลงฟังก์ชันของ s ให้กลายเป็นฟังก์ชันของ z จึงจะมีความสามารถในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลได้

เราจะเริ่มต้นโดยการเรียนรู้วิธีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก ที่อนุญาตให้ความถี่ต่ำผ่านได้ ที่เรียกทับศัพท์ภาษาอังกฤษว่า โลว์พาสส์ (lowpass) ซึ่งโดยปกติแล้ว วงจรกรองสัญญาณอนาล็อกชนิดโลว์พาสส์นี้ยังแบ่งออกเป็น 3 ประเภทตามรูปร่างลักษณะของการตอบสนองความถี่ (frequency response) กล่าวคือ บัตเตอร์เวิร์ธ (Butterworth) เชบีเชฟ (Chebyshev) และ เอลลิปติก (elliptic) จากนั้นเราจะเรียนรู้การแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกชนิดโลว์พาสส์ ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ โดยวิธีที่สำคัญ 2 วิธี คือวิธีอิมพัลส์ อินแวเรียนซ์ (impulse-invariance method) และวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (bilinear transform method)

ท้ายที่สุดเราจะได้เรียนรู้วิธีการที่เรียกว่า การแปลงความถี่ (frequency transformation) เพื่อเปลี่ยนวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ให้เป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดผ่านความถี่สูงหรือที่เรียกทับศัพท์ภาษาอังกฤษว่า ไฮพาสส์ (highpass) วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดผ่านความถี่กลางหรือที่เรียกทับศัพท์ภาษาอังกฤษว่า แบนด์พาสส์ (bandpass) และวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดหยุดความถี่ หรือที่เรียกทับศัพท์ภาษาอังกฤษว่า แบนด์สตอป (band-stop) หรือแบนด์รีเจกต์ (bandreject) นั่นเอง

2.2 ฟังก์ชันของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกและการตอบสนองความถี่

ในตอนนี้เราจะทำความรู้จักกับสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก กล่าวคือ ฟังก์ชันของระบบกรองสัญญาณอนาล็อกเราจะใช้สัญลักษณ์ $H(s)$ ซึ่ง s เป็นตัวแปรเชิงซ้อนลาปลาซโดยที่ $s = \sigma + j\Omega$ และ ก็คือความถี่อนาล็อก เราจะให้ $H(j\Omega)$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน ความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกโดยที่ฟังก์ชัน $H(j\Omega)$ จะหาได้จากการแทนค่า $s = j\Omega$ ลงใน $H(s)$ กล่าวคือ

$$H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} \quad (2.1)$$

นอกจากนี้เราจะให้ $|H(j\Omega)|^2$ เป็น สัญญลักษณ์ แทน ขนาด กำลัง สอง (squared magnitude) โดยที่

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) H^*(j\Omega) = H(s) H(-s)|_{s=j\Omega} \quad (2.2)$$

หรือนั่นคือขนาดกำลังสองหาได้จากผลคูณระหว่างฟังก์ชันความถี่ $H(j\Omega)$ และคอนจูเกต $H^*(j\Omega)$ ของมัน หรืออาจหาได้จากการแทนค่า $s = j\Omega$ ลงในผลคูณระหว่าง $H(s)$ และ $H(-s)$

เราตั้งข้อสังเกตว่าหากมีใครกำหนดฟังก์ชัน $|H(j\Omega)|^2$ มาให้เราจะสามารถหา $H(s)$ $H(-s)$ ได้จากความสัมพันธ์ (2.2) และจากผลคูณ $H(s) H(-s)$ นี้เราสามารถจะแยก $H(s)$ ออกจาก $H(-s)$ ได้ โดยอาศัยคุณสมบัติความสมมาตรรอบแกน $j\Omega$ ในระนาบของ s ที่ว่าโพลและซีโรของ $H(s)$ จะอยู่ทางซ้ายของแกน $j\Omega$ ขณะที่โพลและซีโรของ $H(-s)$ จะอยู่ด้านขวาของแกน $j\Omega$ เราจะเลือกเฉพาะโพลและซีโรของ $H(s)$ ที่อยู่ทางซ้ายของแกน $j\Omega$ เพื่อใช้งานเท่านั้นเพราะเป็นโพลและซีโรที่ห้วงจรกรองสัญญาณอนาล็อกที่เสถียร (stable)

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดขนาดกำลังสองของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก

$$|H(j\Omega)|^2 = (a^2 + \Omega^2)^{-1}$$

มาให้ จงหา $H(s)$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ (2.2) เราแทนค่า $\Omega = s/j = -js$ ลงใน $|H(j\Omega)|^2$ ที่กำหนดให้ทำให้ได้

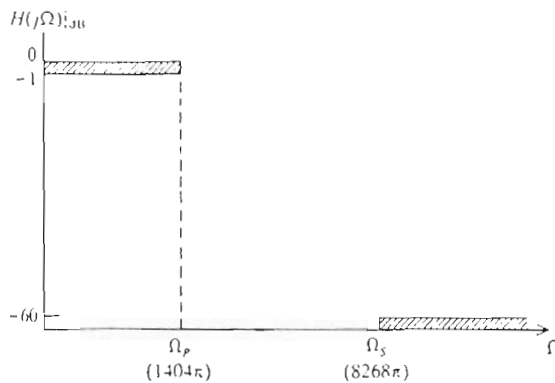
$$\begin{aligned} H(s) H(-s) &= |H(j\Omega)|^2 \Omega = -js \\ &= (a^2 - s^{-2}) = [(a + s)(a - s)]^{-1} \end{aligned}$$

นั่นคือโพลของ $H(s) H(-s)$ อยู่ที่ $s = \pm a$ เราเลือกเฉพาะโพลที่อยู่ครึ่งซ้ายของระนาบ s ทำให้ได้คำตอบว่า

$$H(s) = [s + a]^{-1}$$

2.3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก

ในตอนนี้เราจะเรียนรู้เทคนิคการหาโพลและซีโรในระนาบ s ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก โดยที่ว่าการตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรมีลักษณะเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ รูปที่ 2.1 แสดงตัวอย่างของเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก ชนิดโลว์พาสส์ โดยที่ย่านระหว่าง $\Omega = 0$ ถึง $\Omega = \Omega_p$ เราเรียกว่าย่านผ่านความถี่ (passband) ย่านระหว่าง $\Omega = \Omega_s$ และ $\Omega = \infty$ เรียกว่าย่านหยุดความถี่ (stopband) ส่วนย่านระหว่าง Ω_p และ Ω_s เรียกว่าย่านเปลี่ยนแปลง (transition band) ซึ่งเราจะพบว่าในย่านผ่านความถี่ของ ตัวอย่างนี้ ขนาด $|H(j\Omega)|_{db}$ ต้องอยู่ระหว่าง 0 และ -1 ดีบี (dB ข้อยาก decibel เป็น หน่วยที่เราจะอธิบายในตอน ที่ 2.2) และในย่านหยุดความถี่ขนาด $|H(j\Omega)|_{db}$ ต้องต่ำกว่า -60 ดีบี หน้าที่ของเราคือจะต้องหาฟังก์ชัน $H(s)$ ซึ่งมีการตอบสนองความถี่ของขนาดอยู่ภายในขอบเขตของเงื่อนไขดังกล่าว เรามีฟังก์ชันอยู่ 3 ประเภทกล่าวคือ บัตเตอร์เวิร์ธ เชบิเชฟ และเอลลิปติก ซึ่งจะให้คุณลักษณะการตอบสนองความถี่ของขนาดอยู่ภายในขอบเขตของเงื่อนไขดังกล่าวเราจะทำการศึกษาการได้มาของฟังก์ชันทั้งสามดังต่อไปนี้



รูป 2.1 ตัวอย่างข้อกำหนดการตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกชนิดโลว์พาสส์

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกบัตเตอร์เวิร์ธ วงจรกรองสัญญาณอนาล็อกบัตเตอร์เวิร์ธ จะเป็นแบบที่เข้าใจง่ายที่สุด ทั้งนี้เพราะบัตเตอร์เวิร์ธเป็นฟังก์ชันที่ตรงไปตรงมา การหาค่าแห่งโพลและซีโรก็ไม่ซับซ้อน โดยที่โพลทั้งหลายจะวางตัวในระนาบ s อยู่บนเส้นรอบวงของ

วงกลมที่มีจุดกำเนิด (origin) เป็นจุดศูนย์กลาง นอกจากนั้นการตอบสนองความถี่ขนาดของวงจรรองสัญญาณลอกลอกบัคเตอร์เวิร์ทซ์นิคโลว์พาสส์จะมีลักษณะเรียบที่สุดโดยมีขนาดสูงสุดที่ความถี่ศูนย์และค่อย ๆ ลดลงอย่างสม่ำเสมอ (monotonically decreasing) และมีขนาดเป็นศูนย์ที่ความถี่อนันต์

ขนาดกำลังสองของวงจรรองสัญญาณบัคเตอร์เวิร์ทซ์นิคโลว์พาสส์ ที่มีลำดับ (order) N เขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$|H_B(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}} \tag{2.3}$$

ซึ่งเราจะสังเกตได้ว่าที่ $\Omega = 0$ ขนาดกำลังสอง $|H_B(j\Omega)|^2 = 1$ และที่ $\Omega = \Omega_c$ ขนาดกำลังสองจะลดลงไปเหลือ 1/2 กล่าวคือ $|H_B(j\Omega_c)|^2 = 1/2$ หรือในหน่วยของเดซิเบล (decibel หรือย่อว่า dB) $|H_B(j\Omega)|_{dB} = -3$ เราเรียก ว่าเป็นความถี่คัทออฟ (cutoff frequency)

ต่อไปเราจะทำการหา $H(s) H(-s)$ โดยใช้ความสัมพันธ์ (2.2) โดยการแทน $\Omega = s/j$ ลงใน (2.3) ทำให้ได้ว่า

$$H_B(s) H_B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}} \tag{2.4}$$

ซึ่งจะมีโพลทั้งกันจำนวน $2N$ ซึ่งจะได้จากการให้

$$1 + (s/j\Omega_c)^{2N} = 0 \tag{2.5 a}$$

หรือนั่นคือ

$$(s/j\Omega_c)^{2N} = -1 \tag{2.5 b}$$

โดยการคูณทั้งสองข้างของ (2.5 b) ด้วย $(j\Omega_c)^{2N}$ ทำให้ได้ว่า

$$s^{2N} = (-1)(j\Omega_c)^{2N} \tag{2.6 a}$$

เราทราบจากทฤษฎีของระนาบเชิงซ้อนว่า -1 หมายถึง $e^{j\pi}$ และ j หมายถึง $e^{j\pi/2}$ เพราะฉะนั้น เราจึงเขียน (2.6) ได้ว่า

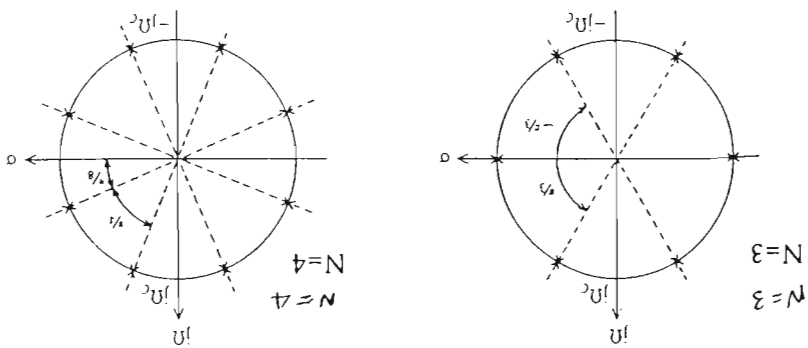
$$s^{2N} = e^{j\pi} (\Omega_c e^{j\pi/2})^{2N} \tag{2.6 b}$$

และเราทราบต่อไปด้วยว่าจำนวนเชิงซ้อนไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเราคูณด้วย $e^{j2\pi m}$ โดยที่ m คือเลขจำนวนเต็มใด ๆ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ จำนวนเชิงซ้อนมีคาบ $e^{j2\pi m}$ นั่นเอง เพราะฉะนั้นเราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} s^{2N} &= e^{j\pi} (\Omega_c e^{j\pi/2})^{2N} e^{j2\pi m} \\ &= \Omega_c^{2N} e^{j\pi(N+2m+1)} \end{aligned} \tag{2.6 c}$$

โดยการถอดกรณฑ์ที่ $2N$ ทั้งสองข้างของ (2.6 c) ทำให้เราได้ตำแหน่งโพลว่าอยู่ที่

$$s_m = \Omega_c \exp \left[j\pi \frac{(N+2m+1)}{2N} \right] \text{ โดยที่ } 0 \leq m \leq 2N-1 \tag{2.7}$$



รูป 2.2 ตำแหน่งของโพลในระนาบ s ของ $H_B(s)$ $H_B(-s)$ กรณี $N=3$ $N=4$

นั่นคือโพลที่ m ซึ่ง $0 < m < 2N-1$ จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี Ω_c ตรงจุดที่ทำมุม $(N+2m+1)\pi/2N$ กับแกนจริง (real axis) รูปที่ 2.2 แสดงตัวอย่างตำแหน่งของโพลในระนาบ s กรณีที่ $N=3$ และ $N=4$ ซึ่งเราจะสังเกตว่าโพลจะวางตัวด้วยระยะห่างระหว่างโพลที่เท่ากันบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี Ω_c แต่จะไม่มีโพลใดอยู่บนแกน $j\Omega$ โพลของ $H_B(s)$ $H_B(-s)$ ซึ่งอยู่ด้านซ้ายของระนาบ s เป็นของ $H_B(s)$ ที่เราปรารถนา ขณะที่โพลที่อยู่ทางด้านขวาของระนาบ s จะเป็นของ $H_B(-s)$ ซิโรจำนวน $2N$ ของ $H_B(s)$ $H_B(-s)$ จะอยู่ที่ตำแหน่ง $s=\infty$ และครึ่งหนึ่งจะเป็นของ $H_B(s)$ ในตอนต่อ ๆ ไป เราจะแสดงวิธีแปลงโพลและซิโรเหล่านี้จากระนาบ s ให้ไปอยู่ในระนาบ z เพื่อให้ได้มาซึ่งวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลต่อไป

หากเราพิจารณาฟังก์ชันขนาดกำลังสองของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลดังแสดงในความสัมพันธ์ (2.3) เราจะเห็นว่าเมื่อความถี่ Ω มีค่าสูงขึ้น การตอบสนองความถี่ขนาดกำลังสองจะมีค่าลดลงกล่าวคือ $|H(j\Omega)|^2 \leq 1/\Omega^{2N}$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ การตอบสนองความถี่ของ ขนาด $|H(j\Omega)|^2 \leq 1/\Omega^N$ นั่นเอง โดยการหาค่าลอการิทึมของขนาดซึ่งมีหน่วยเรียกว่า ดีบี (dB) ซึ่งย่อจากเดซิเบล (decibel) เราจะได้ว่า

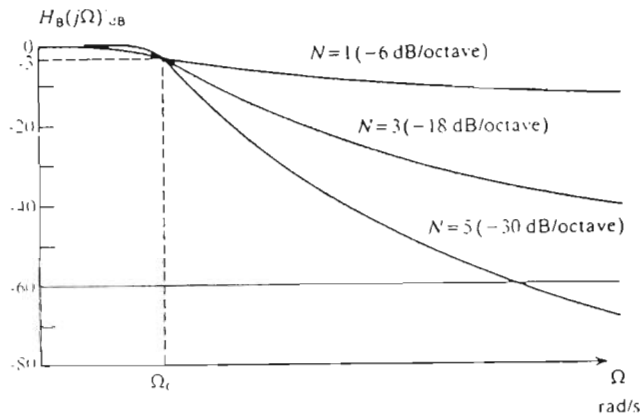
$$\begin{aligned} |H_B(j\Omega)|_{dB} &= 10 \log_{10} |H_B(j\Omega)|^2 \\ &= -10 \log_{10} [1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}] \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อ Ω มีค่ามากเราเขียนเป็นค่าประมาณอย่างใกล้เคียงได้ว่า

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} |H_B(j\Omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \Omega^N = -20 N \log_{10} \Omega \quad (2.8)$$

เมื่อ Ω เพิ่มขึ้นสิบเท่าตัว หรือที่เรียกทับศัพท์ภาษาอังกฤษว่า เพิ่มขึ้นหนึ่งเด็คเคด (decade) เราจะเห็นว่าค่าการตอบสนองความถี่ของขนาดจะลดลง 20 ดีบี ต่อหนึ่งโพล หรือย่อ ๆ ว่า -20N ดีบี/เด็คเคด และหากเราให้ Ω เพิ่มขึ้นสองเท่าตัว หรือเรียกทับศัพท์ภาษาอังกฤษว่า เพิ่มขึ้นหนึ่ง อ็อกเตฟ (octave) ค่าการตอบสนองความถี่ของขนาดจะลดลง 6 ดีบีต่อหนึ่งโพล หรือเขียนย่อ ๆ ได้ว่า -6N ดีบี/อ็อกเตฟ รูปที่ 2.3 แสดงการตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณ บัตเตอร์เวิร์ท โดยแกนตั้งแทนขนาด $|H_B(j\Omega)|_{dB}$ มีหน่วยเป็นดีบี และแกนนอนแทนความถี่ซึ่งมีหน่วยเป็น เรเดียน/วินาที เราจะสังเกตว่าไม่ว่าลำดับ N จะมีค่าเท่าไรก็ตามขนาดจะมีค่า -3 ดีบี ที่ $\Omega = \Omega_c$ และความชันของขนาดจะเพิ่มขึ้นเมื่อ N เพิ่มขึ้นหรือนั่นคือเมื่อ N สูงขึ้น การตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณโลว์พาสในอุดมคติที่เราปรารถนามากขึ้น การกำหนดค่า

ลำดับ N จะเป็นเท่าใดจะแล้วแต่เงื่อนไขของข้อกำหนดว่า Ω_c มีค่าเท่าไร หรือขนาดโน้ตผ่านความถี่และขนาดโน้ตผ่านหยุดความถี่จะเป็นอย่างไร ซึ่งเราจะเข้าใจมากขึ้น เมื่อศึกษาตัวอย่างดังต่อไปนี้



รูป 2.3 การตอบสนองความถี่ขนาดของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกบัตเตอร์เวิร์ทชนิดโลว์พาสส์ที่ลำดับ N ต่าง

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาค่าลำดับและโพลของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกชนิดโลว์พาสส์ ซึ่งมีลักษณะของขนาดแบบบัตเตอร์เวิร์ทโดยกำหนดให้ความถี่ที่อ็อปพอร์ทที่ 500 เฮิรตซ์ และมีขนาดต่ำกว่า -40 ดบีที่ความถี่ 1000 เฮิรตซ์

วิธีทำ จากข้อกำหนดเราจะได้ความถี่ที่สำคัญคือ

$$\Omega_c = 2\pi \cdot 500 = 1000\pi \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

$$\Omega_s = 2\pi \cdot 1000 = 2000\pi \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

ทำให้เราสามารถหาค่าลำดับ N จาก

$$H(j\Omega_s) = [1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}]^{-1} < 10^{-4}$$

โดยที่ 10^{-4} ได้มาจาก ค่า -40 ดับเบิลความถี่ Ω_s ทำให้ได้ว่า

$$N > \frac{\log_{10}(10^4 - 1)}{2 \log_{10}(\Omega_s/\Omega_c)}$$

โดยการแทนค่า Ω_s และ Ω_c จะได้ว่า

เพื่อให้ได้ตามข้อกำหนด เราจึงเลือก $N=7$ และจากความสัมพันธ์ 2.7) เราจะได้โพลว่า
อยู่ที่

$$s_m = 10000\pi \exp[j\pi(2m + \frac{8}{14})], \quad m = 0, 1, 2, \dots, 13$$

ซึ่งเมื่อเลือกเฉพาะโพลที่อยู่ด้านซ้ายของระนาบ S จะได้ว่า

$$s_1 = -2076\pi,$$

$$s_{2,3} = 2067\pi (\cos(4\pi/5)) = -1680\pi - + j1220\pi = 2067\pi e^{-+j144^\circ}$$

$$s_{4,5} = 2067\pi (\cos(3\pi/5)) = -1680\pi - + j1220\pi = 2067\pi e^{-+j144^\circ}$$

$$s_{6,7} =$$

ตัวอย่างที่ 2.2 ก่อนข้างจะง่ายเพราะกำหนด Ω_c มาให้ บ่อยครั้งที่เราจะพบว่าเงื่อนไขที่กำหนดมาให้จะไม่กำหนด Ω_c แต่จะกำหนดขนาดภายในย่านผ่านความถี่ระหว่าง $\Omega = 0$ และ $\Omega = \Omega_p$ กับขนาดภายในย่านหยุดความถี่ ตั้งแต่ $\Omega = \Omega_s$ ขึ้นไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.3 จงออกแบบวงจรกรองสัญญาณนอกชนิดโลว์พาสส์และมีลักษณะแบบบัตเตอร์เวิร์ธ โดยมีข้อกำหนดต่อไปนี้

ผ่านความถี่ :

$$-1 < |H(j\Omega)|_{dB} \leq 0 \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \leq \Omega \leq 1404\pi \text{ rad/s} \quad (\Omega_p = 1404\pi)$$



ผ่านหยุดความถี่ :

$$|H(j\Omega)|_{dB} < -60 \quad \text{สำหรับ} \quad \Omega \geq 8268\pi \text{ rad/s} \quad (\Omega_s = 8268\pi)$$

วิธีทำ เราจะต้องหาค่าลำดับ N ซึ่งหาก Ω_c กำหนดมาให้ก็จะทำได้โดยง่าย กล่าวคือคำนวณจากความสัมพันธ์

$$|H_B(j\Omega_s)|^2 = [1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}]^{-1} < 10^{-6}$$

โดยที่ 10^{-6} ได้มาจากค่า -60 ดีบีที่ Ω_s หรือนั่นคือ

$$N > \frac{\log(10^6 - 1)}{2\log(\Omega_s/\Omega_c)}$$

แต่เนื่องจากเราไม่ทราบค่า Ω_c จึงคำนวณโดยตรงต่อไปไม่ได้ อย่างไรก็ตาม เราสามารถใช้วิธีหาค่าโดยประมาณก่อนแล้วจึงปรับปรุงให้ได้ตามข้อกำหนด กล่าวคือเราทราบว่าวงจรกรองสัญญาณแบนด์เพาส์นั้น ความชันของขนาดจะโดยประมาณ $-6N$ ดีบี/อ็อกเตฟ เมื่อความถี่มีค่าสูง และจากข้อกำหนดเราทราบว่าจาก $\Omega_p = 1404\pi$ เรเดียน/วินาที ถึง $\Omega_s = 8286\pi$ เรเดียน/วินาที ค่าขนาดเปลี่ยนจาก -1 ดีบีไปเป็น -60 ดีบีหรือนั่นคือเปลี่ยนไป -59 ดีบี นอกจากนี้เรากำหนดระยะห่างระหว่าง Ω_p และ Ω_s ได้ว่าเป็น $\log_2(8286/1404)$ หรือ 2.56 อ็อกเตฟเพราะฉะนั้นโดยการประมาณครั้งแรกว่า

$$-6N = -59/2.56$$

หรือ

$$N = 3.8$$

เนื่องจากลำดับของวงจรกรองสัญญาณต้องเป็นจำนวนเต็มเพราะฉะนั้นเราเลือกค่าที่สูงกว่า 3.8 คือเลือก $N=4$

ต่อไปเราจะคำนวณหา Ω_c ซึ่งเป็นความถี่คัตออฟและเป็นรัศมีของวงกลมที่โพลวางตัวอยู่บนเส้นรอบวง เราจะทำการคำนวณโดยการแทนค่า $N=4$ ลงในความสัมพันธ์ของขนาดที่ความถี่ Ω_s กล่าวคือ

$$|H_B(j\Omega_s)|^2 = [1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}]^{-1} < 10^{-6}$$

หรือ

$$\Omega_c < \Omega_s \quad 10^{-6/2N} = \Omega_s/5.62 = 1470.3\pi$$

เราจะเลือก $\Omega_c = 1470\pi$ ซึ่งจะเป็นค่าที่การตอบสนองความถี่ของขนาดในย่านหยุดความถี่เป็นไปตามข้อกำหนด แต่เราต้องทำการทดสอบว่า $N=4$ และ $\Omega_c = 1470\pi$ ที่เราหาได้ในขั้นนี้นั้น ทำให้การตอบสนองความถี่ของขนาดในย่านผ่านความถี่เป็นไปตามข้อกำหนดหรือไม่ ซึ่งทำได้โดยการหาค่าขนาดที่ $\Omega_p = 1470\pi$ จากความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} H_B(j\Omega_p)^2 &= [1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}]^{-1} \\ &= [1 + (1404\pi/1470\pi)^8]^{-1} \\ &= 1/1.692 \\ &= 0.59 \end{aligned}$$

แต่จากข้อกำหนดที่ Ω_p ขนาดมีค่า -1 ดีบี หรือนั่นคือขนาดกำลังสอง $H_B(j\Omega_p)^2$

ต้องมากกว่า 0.794 แต่ค่า 0.59 ที่หาได้นั้นต่ำกว่า 0.794 เพราะฉะนั้น $N=4$ ที่หาได้จึงต่ำไป เราจึงต้องเพิ่ม N เป็น 5 แล้วคำนวณค่า Ω_c ใหม่จาก

$$\Omega_c < \Omega_s \times 10^{-6/2N} = \Omega_s/3.981 = 2076.8\pi$$

เราเลือก $\Omega_c = 2076 \pi$ และใช้ Ω_c ใหม่ นี้ ทำการทดสอบค่าขนาดที่ Ω_p อีกครั้ง หนึ่งซึ่งได้ว่า

$$|H_B(j\Omega_p)|^2 = [1404/2076]^{2N} = 1/1.02 = 0.98$$

ซึ่งมีค่ามากกว่า 0.794 ตามต้องการ เราจึงสรุปได้ว่าเมื่อ $N=5$ และ $\Omega_c = 2076\pi$ แล้ววงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ท จะมีค่าขนาดในย่านหยุดความถี่ตรงตามข้อกำหนด และค่าขนาดในย่านผ่านความถี่เกินความต้องการของข้อกำหนด

$$|H_B(j\Omega_p)|^2 = [1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{10}]^{-1} > 0.794$$

เราอาจใช้วิธีหนึ่งในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดังกล่าวข้างต้น กล่าวคือ เป็นวงจรกรองสัญญาณที่ค่าขนาดในย่านผ่านความถี่ตรงตามข้อกำหนดและค่าขนาดในย่านหยุดความถี่เกินความต้องการของข้อกำหนด กล่าวคือเมื่อเราทราบว่า $N=5$ เราจะใช้ความสัมพันธ์ของค่าขนาดที่คำนวณหาค่า Ω_c ดังนี้

หรือ

$$\log_{10} \Omega_c > \log_{10} \Omega_p - \frac{1}{10} \log\left(\frac{1}{0.794} - 1\right)$$

ซึ่งเมื่อแทน $\Omega_p = 1404\pi$ ลงไปก็จะได้ $\Omega_c > 1607\pi$ และเมื่อเราใช้ค่า $\Omega_c = 1607$ คำนวณหาค่าขนาดที่ $\Omega_s = 8268\pi$ เราจะได้ว่า

$$|H_B(j\Omega_s)|^2 = [1 + \Omega_s/\Omega_c]^{2N} = 1/7.69 \times 10^{-8} (= -71 \text{ dB})$$

ซึ่งเกินความต้องการของข้อกำหนดในย่านหยุดความถี่

ฉะนั้นเราจะเลือกวงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ท ตัวไหนในสองตัวก็ได้ สำหรับในที่นี้เราจะเลือกกรณี $N=5$ และ $\Omega_c = 2076\pi$ จากนั้นเราใช้ความสัมพันธ์ (2.7) หาค่าแห่งของโพลซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี Ω_c และอยู่ด้านซ้ายของระนาบ s ได้ดังนี้

$$s_1 = -2076\pi,$$

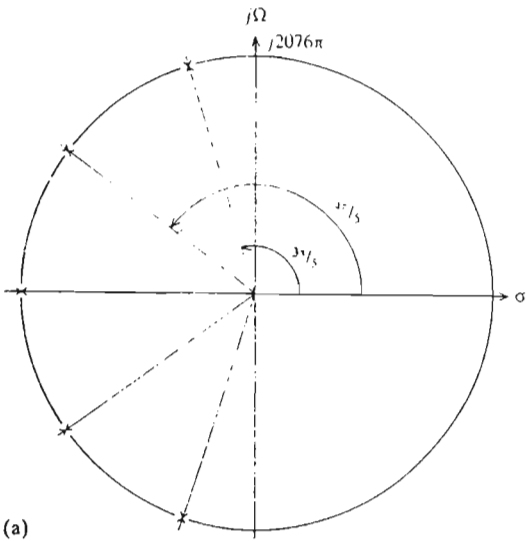
$$s_{2,3} = 2076\pi(\cos(4\pi/5) \pm j \sin(4\pi/5)) = -1680\pi \pm j1220\pi = 2076\pi e^{\pm j144^\circ}$$

$$s_{2,3} = 2076\pi(\cos(3\pi/5) \pm j \sin(3\pi/5)) = -1680\pi \pm j1220\pi = 2076\pi e^{\pm j108^\circ}$$

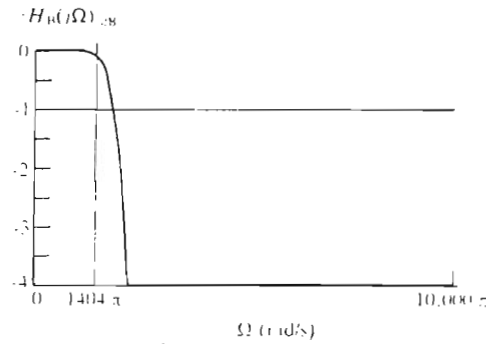
ซึ่งแสดงในรูปที่ 2.4 และจากค่าโพลเหล่านี้เราหาฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณนี้ได้ว่า

$$H_B(s) = \frac{(2076\pi)^5}{[s + 2076\pi][s^2 + 3359\pi s + (2076\pi)^2][s^2 + 1283\pi s + (2076\pi)^2]}$$

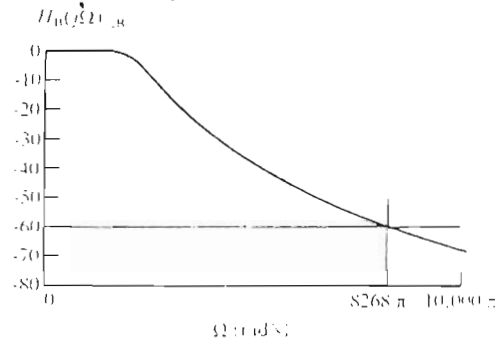
ซึ่งมีค่าตอบสนองความถี่ทั้งขนาดและเฟสแสดงอยู่ในรูปที่ 2.4 เช่นกัน



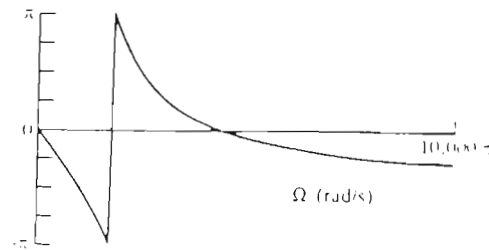
ย่านผ่านความถี่:



ย่านหยุดความถี่:



$\text{Arg}[H_B(j\Omega)]$



รูป 2.4 วงจรกรองสัญญาณอนาล็อกชนิดโลว์พาสส์ซึ่งลักษณะ
การตอบสนองความถี่เป็นแบบบัตเตอร์เวิร์ธลำดับที่ 5
a) ตำแหน่งของโพลและซีโรในระนาบ s
b) การตอบสนองความถี่ของขนาดและความเฟส

ในตอนนี้เราจะสรุปลักษณะที่สำคัญของการตอบสนองความถี่ทั้งขนาดและเฟสของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ธได้ดังนี้

1. ค่าของขนาดจะสูงสุดที่ $\Omega = 0$ และมีค่าลดลงอย่างสม่ำเสมอเมื่อความถี่ Ω เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง ∞ ซึ่งคุณสมบัติอันนี้เราจะสังเกตได้จาก ทฤษฎีการตอบสนองความถี่ (2.3) และการที่ค่า

ตอบ สนองความถี่ของขนาดมีคุณสมบัตินี้ก็เป็นเพราะโพลวงตัวอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมในระนาบ s เราจะได้พบกับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอีก 2 แบบ ในตอนต่อไปซึ่งคำตอบสนองความถี่ของขนาดจะไม่ราบเรียบเหมือนของแบบบัตเตอร์เวิร์ท

2. ค่าตอบสนองความถี่ของขนาดจะราบเรียบที่สุด (maximally flat) ที่รอบจุด $\Omega = 0$ กล่าวในเชิงคณิตศาสตร์ก็คือค่าอนุพันธ์ (derivatives) ทุกลำดับจนถึงลำดับที่ N จะมีค่าเป็นศูนย์ที่ $\Omega = 0$ เพื่อแสดงคุณสมบัตินี้เราจะลองทดสอบกรณีตัวอย่างที่ง่ายโดยให้ $\Omega_c = 1$ และ $N = 1$ ฉะนั้นจาก (2.3) เราจะได้ว่า

$$|H_B(j\Omega)|^2 = (1 + \Omega^2)^{-1} \tag{2.9}$$

ซึ่งอนุพันธ์ที่หนึ่งจะเขียนได้ว่า

$$\frac{d|H_B(j\Omega)|^2}{d\Omega} = \frac{-2\Omega}{(1 + \Omega^2)^2}$$

ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $\Omega = 0$ ส่วนอนุพันธ์ที่สองจะเป็น

$$\frac{d^2|H_B(j\Omega)|^2}{d\Omega^2} = \frac{-2(1 + \Omega^2)^2 + 8\Omega^2(1 + \Omega^2)}{(1 + \Omega^2)^4}$$

ซึ่งมีค่า -2 เมื่อ $\Omega = 0$

3. ค่าตอบสนองความถี่ของเฟสจะเข้าใกล้ $-N\pi/2$ เมื่อ Ω มีค่ามาก โดยที่ N เป็นจำนวนโพลบนเส้นรอบวงของวงกลมบัตเตอร์เวิร์ททางด้านซ้ายของระนาบ s เราสังเกตได้คือว่าในรูปที่ 2.4 (b) นั้น การพล็อตค่าเฟสจะมีการกระโดดประมาณ 2π ทุกครั้งที่เฟสมีค่า $-\pi$

วงจรกรองสัญญาณที่มีลักษณะบัตเตอร์เวิร์ทมีขั้นตอนการออกแบบที่ง่ายที่สุด และเป็นที่ยอมรับ เพราะมีจุดเด่นที่ความราบเรียบของค่าตอบสนองความถี่ของขนาด อย่างไรก็ตามการได้มาซึ่งความราบเรียบนี้ทำให้ วงจรกรองสัญญาณ แบบบัตเตอร์เวิร์ท มีข้อเสียอื่นตรง ที่ย่าน เปลี่ยน แปลงซึ่งอยู่ระหว่างย่านผ่านความถี่และย่านหยุดความถี่จะมีความกว้างมาก เมื่อเปรียบเทียบกับวงจรกรองสัญญาณแบบอื่น ๆ ซึ่งเราจะพบในตอนต่อไป ตัวอย่างเช่น แบบเชบีเชฟ ซึ่งจะมีความกว้าง ของย่าน เปลี่ยนแปลงที่แคบกว่า แต่การตอบสนองความถี่ของขนาดในย่านผ่านความถี่ จะไม่ลดลงอย่างสม่ำเสมอเมื่อความถี่เพิ่มขึ้น

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกเชบีเชฟ วงจรกรองสัญญาณอนาล็อกแบบเชบีเชฟนี้มันข้ามทางคณิตศาสตร์ของขนาดกำลังสองว่า

$$|H_C(j\Omega)|^2 = [1 + \mu^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)]^{-1} \quad (2.10)$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า $\Omega = s/j$ เราจะได้

$$H_C(s) H_C(-s) = [1 + \mu^2 C_N^2(s/j\Omega_p)]^{-1} \quad (2.11)$$

โดยที่ μ เป็นค่าบ่งถึงขอบเขตที่เราอนุญาตให้ขนาดในย่านผ่านความถี่แปรได้และ $C_N(x)$ เป็นโพลีโนเมียลเชบีเชฟลำดับที่ N ซึ่งเขียนในเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$C_N(x) = \cos(N \cos^{-1}(x)) \quad (2.12)$$

นอกจากนี้เราสามารถจะหาโพลีโนเมียลเชบีเชฟได้จากสูตร

$$C_{N+1}(x) = 2x C_N(x) - C_{N-1}(x) \quad \text{โดย } N \geq 1 \quad (2.13)$$

และจากที่ทราบว่า $C_0(x) = 1$ และ $C_1(x) = x$ ตารางที่ 2.1 แสดงโพลีโนเมียลเชบีเชฟจากลำดับ 0 ถึง 5

ตารางที่ 2.1 โพลีโนเมียลเชบีเชฟ

N	$C_N(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

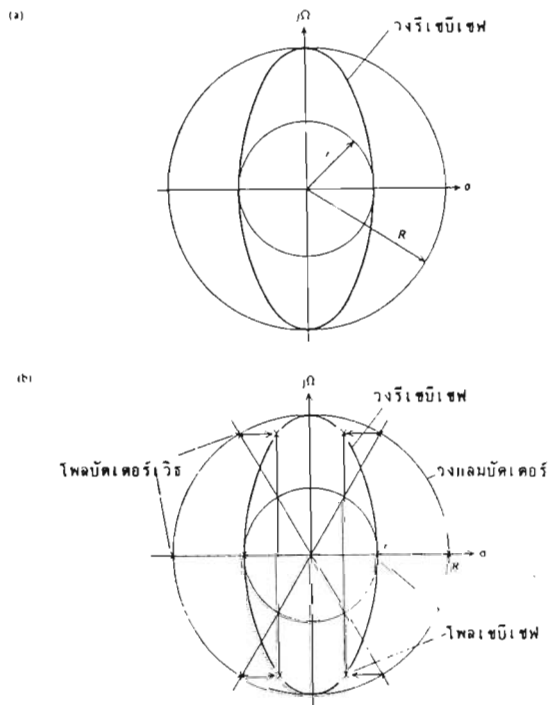
โพลีโนเมียลเชบิเชฟมีคุณสมบัติ 2. ประการที่สำคัญต่อการออกแบบวงจรกรองสัญญาณกล่าวคือ

1. $|C_N(x)| \leq 1$ สำหรับ $|x| \leq 1$ ซึ่งเมื่อแทนค่านี้ลงในความสัมพันธ์ (2.10) เราจะได้ว่าขนาดกำลังสองในย่านผ่านความถี่จะอยู่ภายในขอบเขต

$$(1 + \mu^2)^{-1} \leq |H_C(j\Omega)|^2 \leq 1 \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \quad (2.14)$$

เราจะสังเกตว่าในกรณีของบัตเตอร์เวิร์ธนั้นความถี่ที่สำคัญในการออกแบบคือ ความถี่คัทออฟ Ω_c แต่ในกรณีของเชบิเชฟนี้ ความถี่ที่สำคัญในการออกแบบคือ ความถี่ที่ขอบย่านผ่านความถี่ Ω_p ซึ่งทำให้ในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบเชบิเชฟนี้สามารถกระทำได้จากค่าความถี่ Ω_p และ μ ได้โดยตรง

2. สำหรับ $|x| \gg 1$, $|C_N(x)|$ จะมีค่ามากขึ้นโดยค่าดังกล่าวนี้จะแปรโดยตรงกับ x^N ซึ่งหากสังเกตจากความสัมพันธ์ (2.10) เราก็จะได้ว่าเมื่อ $\Omega \gg \Omega_p$ ค่าของขนาดจะลดลงโดยค่าขนาดดังกล่าวจะโดยประมาณเท่ากับ Ω^{-N} หรือ กล่าวได้ว่าขนาดจะลดลงในอัตรา $6N$ ดีบี/อ็อกเตฟ ซึ่งพฤติกรรมที่ความถี่สูงนี้จะเหมือนกันในกรณีของบัตเตอร์เวิร์ธ



รูป 2.5 วงจรเชบิเชฟ a) การสร้างวงรี
b) ตำแหน่งโพลในระนาบ s ของ $H_C(s)$ เมื่อ $N=3$

เราทราบจากความรู้เรื่องการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกแบบบัตเตอร์เวิร์ทว่า โพลจะวางตัวอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม แต่ในกรณีของเชบีเชฟนี่เราจะพบว่าโพลของ $H_c(s)$ จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงรี (ellipse) โดยที่วงรีดังกล่าวจะมีแกนหลัก (major axis) และแกนรอง (minor axis) ดังแสดงในรูปที่ 2.5 (a) ถ้าเราให้นิยามของพารามิเตอร์ ρ ว่า

$$\rho = \mu^{-1} + \sqrt{1 + \mu^{-2}} \quad (2.15)$$

เราจะหารัศมี r ของวงกลมซึ่งกำหนดแกนรองได้จาก

$$r = \Omega_p (\rho^{1/N} - \rho^{-1/N})/2 \quad (2.16)$$

โดยที่ N คือค่าลำดับของวงจรกรองสัญญาณ และเราจะหารัศมี R ของวงกลมซึ่งกำหนดแกนหลักได้จาก

$$R = \Omega_p (\rho^{1/N} + \rho^{-1/N})/2 \quad (2.17)$$

ตำแหน่งของโพลบนวงรีจะหาได้จากการหาโพลของบัตเตอร์เวิร์ทบนวงกลมแกนหลักก่อน จากนั้นจึงฉาย (project) ลงบนวงรีที่ความถี่เดียวกันดังแสดงในรูปที่ 2.5 (b) ก็จะทำให้ได้ตำแหน่งโพลของเชบีเชฟ

ที่จริงแล้วเราสามารถหาค่าตำแหน่งโพลของเชบีเชฟได้โดยไม่ต้องสร้างวงรี ดังอธิบายมาข้างต้น ดังแสดงในรูปที่ 2.5 (b) ว่าค่า $j\Omega$ ของโพลถูกกำหนดโดยจุดตัดระหว่างเส้นตรงทั้ง N เส้น กับวงกลมวงใหญ่ และค่า σ ของโพลถูกกำหนดโดยจุดตัดระหว่างเส้นตรงทั้ง N เส้นกับวงกลมเล็ก ซึ่งถ้าหากเราทราบมุมที่เส้นตรงเหล่านี้ทำกับแกนจริงบวก เราก็จะหาค่าตำแหน่งโพลของเชบีเชฟในระนาบ s มุมดังกล่าวนี้จะหาได้จากมุมโพลของบัตเตอร์เวิร์ทจากความสัมพันธ์ (2.7) กล่าวคือ

$$\theta_m = j\pi \left(\frac{N + 2m + 1}{2N} \right) \quad \text{โดยที่ } 0 \leq m \leq 2N - 1 \quad (2.18)$$

ทำให้ได้ตำแหน่งโพลของเซบีเซฟว่า

$$S_m = r \cos (\theta_m) + jR \sin (\theta_m) \quad \text{โดยที่} \quad 0 \leq m \leq 2N-1 \quad (2.19)$$

ซึ่งเราจะเลือกแต่เฉพาะโพลที่วางตัวอยู่ทางด้านซ้ายของระนาบ s เพื่อนำมาประกอบกันเป็น $H_c(s)$ ส่วนซีโรจะอยู่ที่ $s = \infty$

ตัวอย่างที่ 2.4 เราจะออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกชนิดโลว์พาสส์ และมีคุณลักษณะการตอบสนองความถี่แบบเซบีเซฟ โดยมีข้อกำหนดเหมือนกับในตัวอย่างที่ 2.3 กล่าวคือ ข่านผ่านความถี่

$$-1 < |H(j\Omega)|_{dB} \leq 0 \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \leq \Omega \leq 1404\pi \text{ rad/s} \quad (\Omega_p = 1404\pi)$$

ข่านหยุดความถี่

$$|H(j\Omega)|_{dB} < -60 \quad \text{สำหรับ} \quad \Omega \geq 8268\pi \text{ rad/s} \quad (\Omega_s = 8268\pi)$$

วิธีทำ

การหาค่า μ จากข้อกำหนดที่ให้ขนาดในข่านผ่านความถี่มีค่าแปรเปลี่ยนไม่เกิน -1 ดีบี ทำให้เราใช้ความสัมพันธ์ที่ (2.10) และ (2.14) หาค่า μ จาก

$$10 \log(1 + \mu^2)^{-1} > -1 \text{ dB}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\mu < [10^{0.1} - 1]^{1/2} = 0.508$$

เราจะให้ $\mu = 0.508$

การหาค่าลำดับ N โดยใช้ความสัมพันธ์ (2.10) ในข่านหยุดความถี่ กล่าวคือ

$$|H(j\Omega)|^2 = [1 + \mu^2 C_N^2 (\Omega_s/\Omega_p)]^{-1} < 10^{-6}$$

โดยที่ 10^{-6} เป็นค่าจาก -60 ดีบี เนื่องจากเราทราบว่า $\Omega_s/\Omega_p = 5.9$ เราจึงหาค่า N ที่จะทำให้ $C_N(5.9)$ ให้ค่าขนาดในย่านหยุดความถี่เป็นไปตามข้อกำหนดกล่าวคือ

$$C_N(5.9) > [(10^6 - 1)/\mu^2]^{1/2} = 1969$$

ซึ่งเมื่อทำการทดสอบค่า N ต่าง ๆ โดยใช้ตารางที่ 2.1 ช่วยจะพบว่า $C_3(5.9) = 804$, $C_4(5.9) = 9416$ ฉะนั้น $N=4$ จึงเป็นค่าที่สูงเพียงพอ

การหาค่าแกนของวงรี รัศมีของวงกลมเล็กที่ให้ค่าแกนรองและรัศมีของวงกลมใหญ่ที่ให้ค่าแกนหลักของวงรี จะหาได้จากการคำนวณ จากความสัมพันธ์ (2.15) กล่าวคือ

$$\rho = 0.508^{-1} + (1 + 0.508^{-2})^{1/2} = 4.17$$

และใช้ความสัมพันธ์ (2.16) และ (2.17) หาค่ารัศมีได้ว่า

$$R = \frac{1404\pi}{2} (4.17^{1/4} + 4.17^{1/4}) = 702\pi (1.43 + 0.67) = 1473\pi$$

และ

$$r = \frac{1404\pi}{2} (4.17^{1/4} + 4.17^{1/4}) = 702\pi (1.43 + 0.67) = 533\pi$$

การหาค่าแฉ่งโพล เราใช้ความสัมพันธ์ (2.18) หาค่ามุมโดยที่เราทราบว่า $N=4$ ทำให้ได้ว่า

$$\theta_m = j\pi \left(\frac{2m+5}{10} \right) \quad \text{โดยที่} \quad 0 \leq m \leq 7$$

ซึ่งเมื่อแทนค่าและหาเฉพาะมุมของโพล 4 ตัว ที่อยู่ทางซ้ายมือของระนาบ s จะได้ค่ามุมเป็น $\pm 7\pi/8$ และ $\pm 5\pi/8$ จากนั้นเราใช้ความสัมพันธ์ (2.19) จำนวนเฉพาะโพลทั้ง 4 ตัวนี้ได้ค่าเป็น

$$s_{1,2} = 533\pi \cos(7\pi/8) \pm j1473\pi \sin(7\pi/8) = -492\pi \pm j564\pi = 748\pi e^{\pm j131^\circ}$$

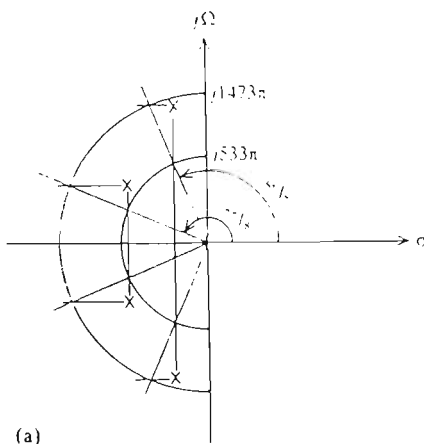
และ

$$s_{3,4} = 533\pi \cos(5\pi/8) \pm j1473\pi \sin(5\pi/8) = -204\pi \pm j1361\pi = 1376\pi e^{\pm j98.5^\circ}$$

ซึ่งเมื่อนำมาสร้างเป็น $H_c(s)$ จะได้ว่า

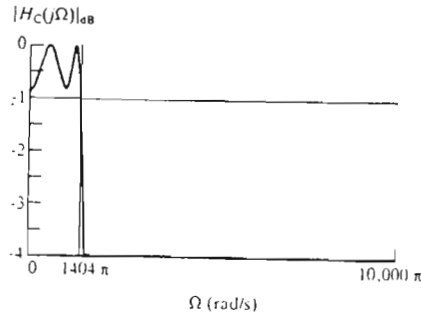
$$H_c(s) = \frac{1.06 \pi^4 10^{12}}{[s^2 - 490\pi s + (748\pi)^2] [s^2 - 203.4\pi s + (1376\pi)^2]}$$

รูปที่ 2.6 (a) แสดงตำแหน่งโพลและรูปที่ 2.6 (b) แสดงขนาดและเฟสของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกแบบเชบีเชฟที่ทำได้



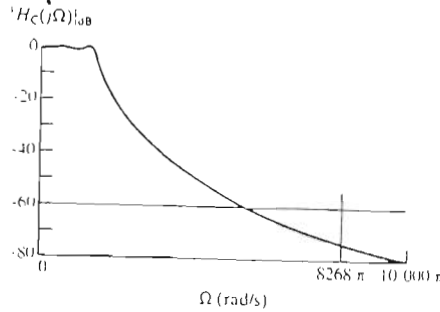


ย่านผ่านความถี่:



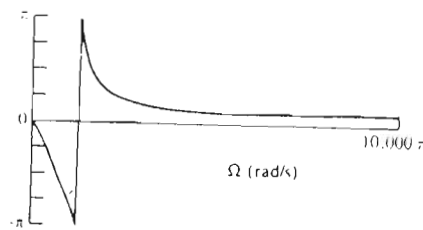
b(i)

ย่านหยุดความถี่:



b(ii)

$\text{Arg}[H_C(j\Omega)]$



b(iii)

รูปที่ 2.6 (a) แสดงตำแหน่งโพลทั้ง 4 ที่อยู่ด้านซ้ายมือของระนาบ s ส่วนรูปที่ 2.6

(b) แสดงค่าตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส

เนื่องจากการที่โพลของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟอยู่ใกล้แกน j มากกว่าโพลของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ธฉะนั้นค่าตอบสนองความถี่ขนาดของวงจรกรองสัญญาณเชบีเชฟ จึงมีลักษณะเป็นคลื่น (ripple) ในย่านผ่านความถี่ โดยที่ขั้วคลื่นจะตรงกับบริเวณความถี่ใกล้ตำแหน่งของโพลอย่างไรก็ดีแม้ว่าในย่านผ่านความถี่ขนาดจะมีลักษณะเป็นคลื่นแต่ที่ความถี่เหนือย่านผ่านความถี่ขึ้นไปขนาดจะมีลักษณะเรียบและมีค่าลดลงอย่างสม่ำเสมอเมื่อความถี่สูงขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับ

วงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ทที่มีค่าลำดับ N เท่ากัน และข้อกำหนดการแปรเปลี่ยนของขนาดในย่านผ่านความถี่เหมือนกัน เราจะพบว่าวงจรกรองสัญญาณเชบีเชฟจะมีย่านเปลี่ยนแปลงที่แคบกว่าทำให้ขนาดลดลงสู่ข้อกำหนดในย่านหยุดความถี่ด้วยอัตราที่เร็วกว่า หรือ เราอาจจะกล่าวอีกแบบหนึ่งว่า สำหรับข้อกำหนดที่คล้ายกันทั้งในย่านผ่านความถี่ย่านเปลี่ยนแปลง และย่านหยุดความถี่ วงจรกรองสัญญาณเชบีเชฟ ใช้ลำดับ N ที่ต่ำกว่าของวงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ทซึ่งในทางปฏิบัติลำดับที่ต่ำกว่าหมายถึงการใช้จำนวนชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์ที่น้อยกว่าทำให้เกิดการประหยัดค่าใช้จ่ายได้

การตอบสนองความถี่ของเฟสของเชบีเชฟจะคล้ายคลึงกับในกรณีของบัตเตอร์เวิร์ทกล่าวคือจะลดลงอย่างสม่ำเสมอเข้าสู่ค่า $-N \pi/2$ เมื่อความถี่มีค่าสูงเข้าหาค่าอนันต์ สำหรับใน ตัวอย่างที่ 2.4 นี้จะมีค่า -2π

เนื่องจากโพลของวงจรกรองสัญญาณเชบีเชฟมีตำแหน่งอยู่บริเวณใกล้แกน j ดังกล่าวมาแล้ว ทำให้เกิดผลกระทบอีกประการหนึ่งที่สำคัญคือ หากมีค่าผิดพลาดเพียงเล็กน้อยของ ตำแหน่งโพล ซึ่ง อาจเกิดจากการคำนวณที่เราอาจต้องปัดทศนิยม จะส่งผลให้ขนาดเพี้ยนไปจากข้อกำหนดได้ซึ่งผลนี้จะกระทบมากโดยเฉพาะในย่านผ่านความถี่ ฉะนั้นเราจึงอาจจะต้องเลือก μ ที่มีค่าต่ำ ๆ ไว้เพื่อเป็นการเผื่ออาการเพี้ยนดังกล่าวที่อาจเกิดขึ้นได้ อย่างไรก็ดีเราต้องตระหนักไว้เสมอว่าค่า μ ที่ต่ำอาจหมายถึง การที่ต้องเพิ่มค่าลำดับ N เพื่อรักษาให้ค่าตอบสนองความถี่ของขนาดอยู่ภายในเงื่อนไขของข้อกำหนด

ทั้งในกรณีของบัตเตอร์เวิร์ทและเชบีเชฟ เรามีข้อจำกัดตรงที่ว่าฟังก์ชันของระบบที่หาได้กล่าวคือ $H_B(s)$ และ $H_C(s)$ จะมีแต่โพลเท่านั้น แต่บรรดาซีโรจะอยู่ที่ตำแหน่งอนันต์หมด เพราะฉะนั้นเราอาจเกิดความรู้สึกว่าหากเรามีสิทธิ์เลือกซีโรมารวมไว้ในฟังก์ชันของระบบได้ด้วยก็จะช่วยให้การกำจัดสัญญาณในย่านหยุดความถี่ทำได้ดีกว่าซึ่งเราจะพบในตอนต่อที่กล่าวถึง วงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบเอลเลปติก

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกเอลเลปติก

วงจรกรองสัญญาณเอลเลปติกมีย่านเปลี่ยนแปลงที่แคบที่สุดในบรรดาวงจรกรองสัญญาณทั้ง 3 ประเภทที่กล่าวถึงด้วยกัน แต่ในเชิงคณิตศาสตร์จะซับซ้อนที่สุด วงจรกรองสัญญาณเอลเลปติกมีนิยามว่า

$$H_E(s) H_E(-s) = [1 + \varepsilon^2 E_N^2(s/j\Omega_p)]^{-1} \tag{2.20}$$

โดยที่ ε เป็นค่าวัดขอบเขตที่อนุญาตให้ขนาดแปรได้ในย่านผ่านความถี่ Ω_p เป็นความถี่ที่ขอบย่านผ่านความถี่ และ $E_N(x)$ เป็นฟังก์ชันเอลเลปติกจาโคเบียน (Jacobian elliptic function)

ลำดับที่ N การศึกษาให้เข้าใจวงจรกรองสัญญาณประเภทนี้จะเกินขอบเขตของจุดมุ่งหมายของหนังสือเล่มนี้ แต่ผู้ที่สนใจจะหาอ่านได้จากเอกสารอ้างอิงท้ายบท [1, 2] สำหรับในที่นี้เป็นการเพียงพอที่จะกล่าวว่าส่วนที่แตกค่าจากโพลีโนเมียลเชิงซ้อนคือ $E_N(s)$ จะมีทั้งโพลีโนเมียลเศษ และโพลีโนเมียลส่วน ซึ่งเมื่อแทนค่าลงใน (2.20) โพลีโนเมียลส่วนของ $E_N^2(s/j\Omega_p)$ จะ กลายเป็นโพลีโนเมียลเศษของ $H_E(s) H_E(-s)$ ซึ่งรากของมันก็คือซีโรนั่นเอง เพื่อประโยชน์ในการเข้าใจเราจะยกตัวอย่างฟังก์ชันที่ง่ายกว่าฟังก์ชันเอลลิปติกจาคอบีเช่นลำดับที่หนึ่ง กล่าวคือ

$$E(s) = \frac{(s^2 - 1)}{(s^2 + 1)} \quad (2.21)$$

และ

$$E^2(s) = \frac{(s^2 - 1)^2}{(s^2 + 1)^2} \quad (2.22)$$

ฟังก์ชันระบบจะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} H(s) H(-s) &= \frac{1}{1 + \epsilon^2 \frac{(s^2 - 1)^2}{(s^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{(s^2 + 1)^2}{(s^2 + 1)^2 + \epsilon(s^2 - 1)^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

ซึ่งเราจะสังเกตได้ว่า $H(s)$ มีซีโรที่ $s = \pm j$ และซีโรเหล่านี้มาจากโพลีโนเมียลส่วนของ $E(s)$ นั่นเอง

วงจรกรองสัญญาณอนาลอกแบบเอลลิปติกนี้เราอาจจะพิจารณาว่าเป็นวิวัฒนาการต่อเนื่องจากบัตเตอร์เวิร์ธและเชบีเชฟก็ได้ กล่าวคือ การตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ธจะราบเรียบที่สุดและมีค่าขนาดลดลงจากค่าสูงสุดที่ $\Omega = 0$ อย่างสม่ำเสมอไปหาค่าขนาดต่ำสุดที่ $\Omega = \infty$ เมื่อเราอนุญาตให้การตอบสนองความถี่ของขนาดมีลักษณะเป็นคลื่นได้ในช่วง ผ่านความถี่ของวงจรกรองสัญญาณเชบีเชฟ เราก็พบว่าช่วงเปลี่ยนแปลงแคบลง ขณะที่ขนาดยังลดลงอย่างสม่ำเสมอในช่วงหยุดความถี่เข้าหาค่าขนาดต่ำสุดที่ $\Omega = \infty$ เช่นกัน โดยใช้แนวความคิดเชิงตรรกะช่วงเปลี่ยนแปลงก็สามารถจะทำให้แคบลงไปอีกโดยการอนุญาตให้ขนาดในช่วงหยุดความถี่มีลักษณะเป็นคลื่นได้ ความเป็นคลื่นนี้ทำให้เกิดขึ้นได้ในกรณีของวงจรกรองสัญญาณเอลลิปติกซึ่งมีซีโรอยู่บนแกน $j\Omega$ ในช่วงหยุดความถี่ซึ่งต่างจากกรณีบัตเตอร์เวิร์ธและเชบีเชฟที่ซีโร ทั้งหมดจะอยู่ที่ $\Omega = \infty$

ซีโรของ $H_E(s)$ $H_E(-s)$ ที่ตำแหน่งใดๆ ซึ่งสิ้นสุด (finite) จะอยู่ซ้อนกันเป็นคู่ โดยที่ซีโรตัวหนึ่งของคู่ดังกล่าวจะเป็นของ $H_E(s)$ เมื่อเราแยกแฟกเตอร์ $H_E(s)$ $H_E(-s)$ เพื่อหาโพลและซีโรของ $H_E(s)$ และ $H_E(-s)$ นอกจากนี้เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของโพลในเมทริกซ์ของ $H_E(s)$ ต้องเป็นค่าจริง ฉะนั้นซีโรจะต้องมีปรากฏในลักษณะคู่คอนจูเกตด้วย กล่าวคือ ถ้า $H_E(s)$ มีซีโรที่ $s = j\Omega_0$ แล้ว ก็จะต้องมีซีโรที่ $s = -j\Omega_0$ ด้วยนอกจากนี้หากลำดับ N ของ $H_E(s)$ เป็นจำนวนคี่แล้ว $H_E(s)$ จะมีซีโรหนึ่งตัวอยู่ที่ ∞ ด้วย

เนื่องจากการออกแบบโดยตรงเพื่อให้ได้มาซึ่งตำแหน่งของซีโรบนแกน $j\Omega$ ของวงจรรองสัญญาณแบบเอลลิปติกนี้มีลักษณะที่ซับซ้อนทางคณิตศาสตร์ แต่เพื่อเป็นแนวทางให้เกิดความเข้าใจ เราจะใช้วิธีออกแบบโดยประมาณกล่าวคือจะเริ่มจากการออกแบบวงจรรองสัญญาณแบบเบิเชฟเพื่อให้ได้มาซึ่งตำแหน่งโพลก่อน จากนั้นจึงเติมซีโรลงบนแกน $j\Omega$ เพื่อให้ได้ลักษณะของย่านหยุดความถี่ที่ต้องการอย่างไรก็ดีการเติมซีโรลงไปจะทำให้การตอบสนองขนาดในย่านผ่านความถี่เพี้ยนไป เราจึงจำเป็นต้องขยับตำแหน่งโพลเพื่อปรับปรุง การตอบสนองความถี่ขนาดในย่านผ่านความถี่ให้กลับเข้าสู่เงื่อนไขของข้อกำหนดเราจะลองใช้วิธีนี้ออกแบบในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.5 เราจะออกแบบวงจรรองสัญญาณอนาล็อกชนิดโลว์พาสส์ ซึ่งมีลักษณะการตอบสนองความถี่ของขนาดแบบเอลลิปติก เพื่อให้อยู่ในเงื่อนไขของข้อกำหนดต่อไปนี้

ย่านผ่านความถี่ :

$$-1 < |H(j\Omega)|_{dB} \leq 0 \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \leq \Omega \leq 1404\pi \text{ rad/s} (\Omega_p = 1404\pi)$$

ย่านหยุดความถี่ :

$$|H(j\Omega)|_{dB} < -60 \quad \text{สำหรับ} \quad \Omega \geq 8268\pi \text{ rad/s} (\Omega_s = 8268\pi)$$

วิธีทำ เราจะใช้การออกแบบโดยประมาณกล่าวคือ จะเริ่มด้วยการออกแบบวงจรรองสัญญาณแบบเบิเชฟซึ่งมีลำดับต่ำกว่าในตัวอย่างที่ 2.4 จากนั้นจึงจะเติมซีโรเพื่อให้ได้ซึ่ง ย่านผ่านความถี่ตามข้อกำหนด

การหาค่า μ ค่าของ μ มาจากเงื่อนไขของข้อกำหนดในย่านผ่านความถี่ ซึ่งจากตัวอย่างที่ 2.4 เราได้ว่า $\mu = 0.508$

การหาค่า N วงจรรองสัญญาณแบบเบิเชฟในตัวอย่างที่ 2.4 มีลำดับ $N=4$ เราจึงเลือกลำดับที่ต่ำกว่าคือ 3 ในตัวอย่างนี้

การหาค่าแกนของวงรี รัศมีของวงกลมที่ให้ค่าแกนหลักและแกนรองของวงรีหาได้จาก การหาค่า ρ ก่อน ซึ่งในตัวอย่างที่ 2.4 เราได้ $\rho = 4.17$ ฉะนั้นจากความสัมพันธ์ (2.16) และ (2.17) เราได้รัศมีของวงกลมทั้งสองว่า

$$R = \frac{1404\pi}{2} (4.17^1/3 + 4.17^{-1}/3) = 702\pi(1.61 + 0.62) = 1566\pi$$

และ

$$r = \frac{1404\pi}{2} (4.17^1/3 - 4.17^{-1}/3) = 702\pi(1.61 - 0.62) = 694\pi$$

การหาค่าหน้าโพล จากความสัมพันธ์ (2.18) เราหาค่ามุมได้ว่า

$$\theta_m = j\pi \left(\frac{m+2}{3}\right) \text{ โดยที่ } 0 \leq m \leq 5$$

ซึ่งเมื่อเลือกเฉพาะมุมที่ให้โพลด้านซ้ายมือของระนาบ s จะได้ว่าเป็น π และ $\pm 2\pi/3$ และได้ตำแหน่งโพลโดยแทนค่ามุมลงในความสัมพันธ์ (2.19) ทำให้ได้

$$s_1 = -694\pi$$

$$s_{2,3} = 694\pi \cos(2\pi/3) \pm j1566\pi \sin(2\pi/3) = -347\pi \pm j1356\pi = 1400\pi e^{\pm j104.5}$$

ตำแหน่งของโพลแสดงในรูปที่ 2.7 (a) ส่วนการตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรกรองสัญญาณ เชบีเชฟที่หาได้นั้นแสดงอยู่ในรูปที่ 2.7 (b) ซึ่งตามที่คาดคะเนไว้คือย่านหยุดความถี่นั้นขนาดจะไม่ เป็นไปตามข้อกำหนดแม่นยำในย่านผ่านความถี่จะมีขนาดเป็นไปตามข้อกำหนดก็ตามการหาค่าตำแหน่ง ซีโร่เพื่อให้ได้มาซึ่งลักษณะของขนาดในย่านหยุดความถี่เป็นไปตามข้อกำหนด เราจะต้องเลื่อนซีโร่ 2 ตัวของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟซึ่งมีทั้งหมด 3 ตัวที่ให้มาอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งสิ้นสุดบนแกน $j\Omega$ เราหาค่าตำแหน่งใหม่ของซีโร่ได้โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในลักษณะโต้ตอบ (interactive) กับ คอมพิวเตอร์ซึ่งเกินจุดมุ่งหมายของหนังสือเล่มนี้ แต่จะหาอ่านได้จากเอกสารอ้างอิง [3] ทำให้ได้ ค่าตำแหน่งซีโร่ทั้งสองว่าอยู่ที่

$$s_{z1,z2} = \pm j9000\pi$$

ตำแหน่งใหม่ของซีโรทั้งสองนี้จะทำให้ขนาดในย่านผ่านความถี่ลดลงต่ำกว่าข้อกำหนด เพราะฉะนั้น จึงต้องขยับตำแหน่งโพลโดยใช้วิธีการของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ลักษณะได้ตอบเช่นกัน จนกระทั่งการตอบสนองความถี่ของขนาดทั้งในย่านผ่านและหยุดความถี่อยู่ในขอบเขตของข้อกำหนด ตำแหน่งสุดท้ายของโพลคือ

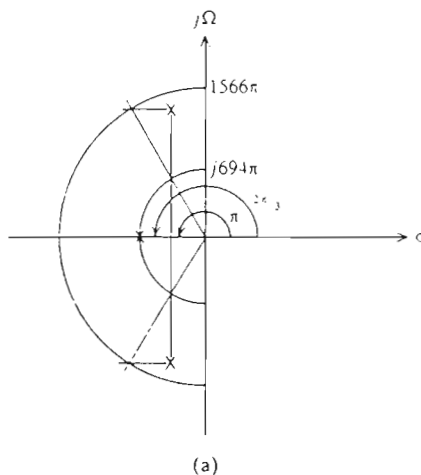
$$s_{p1} = -750\pi$$

$$s_{p2,p3} = -1450 e^{\pm j105}$$

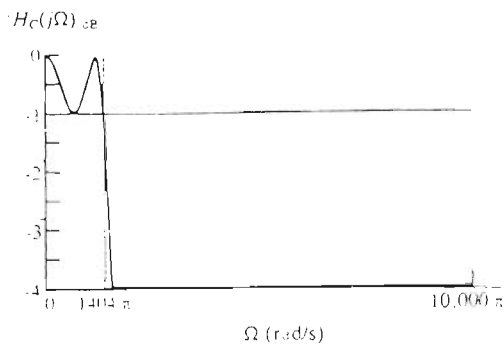
ซึ่งเรานำค่าของโพลและซีโรที่หาได้มาเขียน $H_E(s)$ ได้ว่า

$$H_E(s) = \frac{61[s^2 + (9000\pi)^2]}{[s + 750\pi][s^2 - 751\pi s + (1450\pi)^2]}$$

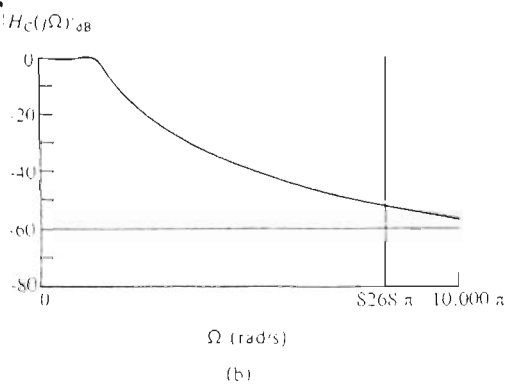
การตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟสแสดงอยู่ในรูปที่ 2.7 (c)



ย่านผ่านความถี่:



ย่านหยุดความถี่:



รูปที่ 2.7 ผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกชนิดโลว์พาสต์
และลักษณะเป็นเอลเลปติก

- ตำแหน่งโพลและซีโรของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟลำดับ 3
- การตอบสนองความถี่ขนาดของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟลำดับ 3
- การตอบสนองความถี่ทั้งของขนาดและเฟสหลังการรวมซีโรที่

ในตัวอย่างนี้เราจะสังเกตว่า การตอบสนองความถี่ของขนาดในย่านหยุดความถี่ไม่มีลักษณะลดลงอย่างสม่ำเสมอแต่มีลักษณะเป็นคลื่นซึ่งมีค่าต่ำที่บริเวณตำแหน่งความถี่ที่ซิริโพรากอยู่ตรงตำแหน่งของซิริโตรงกล่าวนี้ทำให้การตอบสนองความถี่ของเฟสกระโดดด้วยปริมาณ π เรเดียน แต่อย่างไรก็ดีเป็นการเกิดในย่านหยุดความถี่จึงมีผลกระทบเล็กน้อยต่อสัญญาณออก (output) ของวงจร ส่วนในย่านผ่านความถี่นั้น การตอบสนองความถี่ของเฟสจะคล้ายคลึงกับในกรณีของ บัคเตอร์เวิร์ธและเชบีเชฟ

มาถึงในขั้นนี้เราได้เรียนรู้เทคนิคการออกแบบกรองสัญญาณอนาล็อก 3 ประเภท โดยสามารถหาตำแหน่งของโพลและซีโรว์ในระนาบ s ได้ ต่อไปเราจะศึกษาวิธีการแปลงโพลและซีโรว์ จากระนาบ s ไปสู่ระนาบ z โพลและซีโรว์ในระนาบ z ที่ได้จึงนำไปประกอบเป็นฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลตามที่ต้องการ

2.4 วิธีแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล

การแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล กระทำได้โดยการแปลงโพลและซีโรว์จากระนาบ s ไปสู่ระนาบ z ในตอนนี้เราจะอธิบายวิธีการดังกล่าว 2 วิธี วิธีแรกเรียกว่า อิมพัลส์อินแวเรียนซ์ และวิธีที่สองเรียกว่าไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

2.4.1 วิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ คำนี้มาจากภาษาอังกฤษว่า impulse-invariance method ซึ่งจะหมายถึงว่าวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก และวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่เทียบเท่ากัน นี้จะมีการตอบสนองอิมพัลส์ และการตอบสนองค่าหนึ่ง (unit-sample response) ที่เทียบเท่ากัน หากคุณสมบัติในขอบข่ายเวลา (time domain) เทียบเท่ากันเช่นนี้แล้วความรู้สึที่ก็เกิดขึ้นก็คือคุณสมบัติในขอบข่ายความถี่ (frequency domain) ก็ควรจะเทียบเท่ากันเช่นกัน เราจะลองพิจารณาวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ ซึ่งตามนิยามแล้วจะเขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$h(nT_s) = h_A(t)|_{t=nT_s} \quad (2.24)$$

โดยที่ T_s เป็นคาบการสุ่ม (sampling period)

ต่อไปเราจะลองเปรียบเทียบคุณสมบัติของความถี่ของวงจรกรอง สัญญาณอนาล็อกและวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้รับจากวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์จาก $h_A(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกเราจะหาสเปกตรัมความถี่ $H_A(j\Omega)$ ได้จากการหาฟูริเยร์ ทรานส์ ฟอรั่ม ต่อเนื่อง (continuous-time Fourier transform) ดังนี้

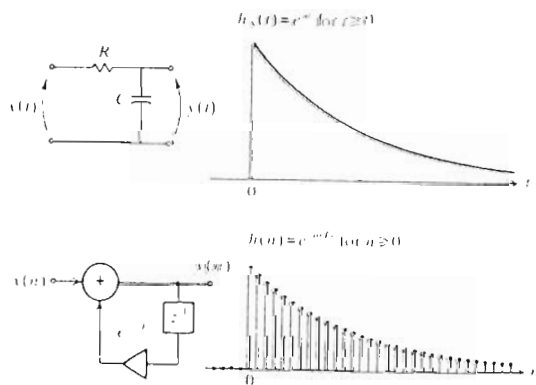
$$H_A(j\Omega) = \int_0^\infty h_A(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (2.25)$$

และเมื่อเราทำการสุ่ม $h_A(t)$ ด้วยคาบ T_s วินาทีดังแสดงทางด้านขวามือของความสัมพันธ์ (2.44) $H_A(j\Omega)$ จะกลายเป็นสเปกตรัมที่มีคาบในแกนความถี่ กล่าวคือจะกลายเป็น $\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_A(j\omega/T_s + j2\pi k/T_s)$ $k=-\infty$ และหากเราให้ $H(e^{j\omega/T_s})$ แทนฟังก์ชันความถี่ของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่เราจึงเขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$H(e^{j\omega/T_s}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_A(j\omega/T_s + j2\pi k/T_s)$$

ตามทฤษฎีการสุ่มของไนควิสต์ (Nyquist Sampling Theorem) นั้นหาก $H_A(j\Omega)$ มีความถี่ที่จำกัดอยู่ระหว่าง $-\Omega_M \leq \Omega \leq \Omega_M$ แล้วและคาบการสุ่ม T_s เลือกให้มีความน้อยกว่า π/Ω_M แล้วจะไม่มีอาการเหลื่อม (aliasing) ของสเปกตรัม แต่จากที่เราทราบว่าการตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกที่ลำดับ N จะมีค่าเป็นศูนย์ที่ความถี่ไม่เกิน N จุดในย่านหยุดความถี่หรือนั่นคือการตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกจะมีค่าขนาดและเฟสแทบทุกความถี่หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ปราศจากการจำกัดความถี่ที่แท้จริง (truly band-limited) ผลที่ตามมา คือ จะมีการซ้อนของสเปกตรัมในแกนความถี่ของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้รับจากวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ สำหรับวงจรกรองสัญญาณที่ $H_A(j\Omega)$ เข้าใกล้ค่าศูนย์เมื่อ Ω เข้าใกล้อนันต์ เป็นต้นว่า ชนิดโลว์พาสส์และแบนด์พาสส์ การซ้อนของสเปกตรัม ของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลจะลดลงเมื่อคาบ T_s เข้าใกล้ค่าศูนย์

ตัวอย่างที่ 2.6 เราจะใช้วิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์แปลงวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกชนิด โลว์พาสส์ลำดับที่ 1 ซึ่งมีส่วนประกอบของวงจรเป็นความต้านทาน R และคาปาซิเตอร์ C ดังแสดงในรูปที่ 2.8



รูป 2.8 เปรียบเทียบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกและดิจิทัล โดยใช้วิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ โดยแสดงโครงสร้างของวงจร และการตอบสนองในขอบข่ายเวลา

วิธีทำ เราทราบว่าหากให้ $a = 1/RC$ แล้วการตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกนี้จะเขียนได้ว่าเป็น

$$h_A(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

เราหาฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกนี้ได้จากการหาลาปลาซทรานส์ฟอร์มของ $h_A(t)$ นั่นคือ

$$H_A(s) = \int_0^{\infty} h_A(t) e^{-st} dt = (s + a)^{-1}$$

และทรานส์ฟอร์มฟังก์ชันของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกนี้ทำได้จากการแทน $s = j\Omega$ ลงใน $H_A(s)$ ทำให้ได้

$$H_A(j\Omega) = (a + j\Omega)^{-1}$$

ต่อไปเราหาการตอบสนองค่าหนึ่งได้จากการสุ่ม $h_A(t)$ ทุก ๆ T_s วินาที ซึ่งเขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$h(nT_s) = \begin{cases} e^{-anT_s} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

การตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลจะหาได้ว่าเป็น

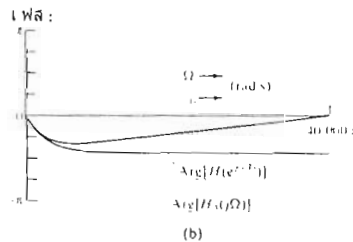
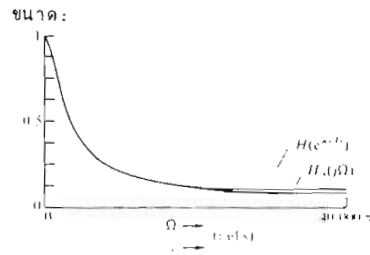
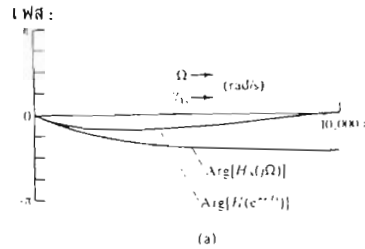
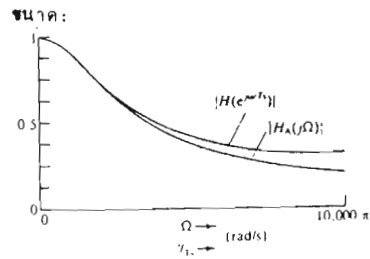
$$H(e^{j\omega/T_s}) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-anT_s}) e^{-jn\omega/T_s} = (1 - e^{aT_s} e^{-j\omega/T_s})^{-1}$$

และฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลหาได้โดยการแทน $z = e^{j\omega/T_s}$ ทำให้ได้ว่า

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s) z^{-n} = (1 - e^{-aT_s} z^{-1})^{-1}$$

วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้รับแสดงอยู่ในรูปที่ 2.8 ซึ่งจะเห็นว่าการตอบสนองค่าหนึ่ง เทียบเท่ากันกับการตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรกรองสัญญาณอนาลอก RC

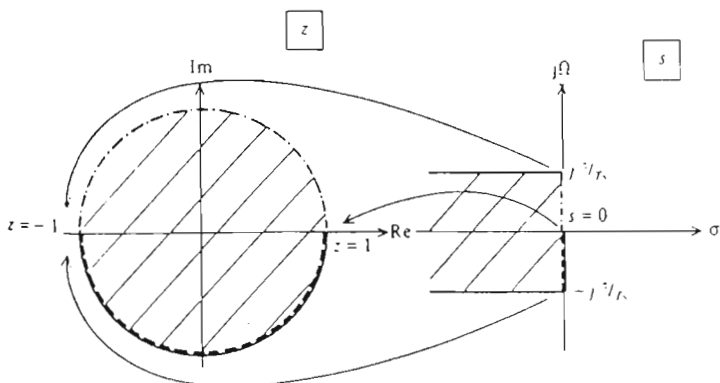
ต่อไปหากเราลองเปรียบเทียบ $H(e^{j\Omega/T_s})$ และ $H_A(j\Omega)$ แสดงอยู่ในรูป 2.9 สำหรับค่า T_s ที่ต่างกันซึ่งเราจะเห็นว่าหาก T_s มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ การตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h(n)\}$ จะยิ่งเหมือน $h_A(t)$ มากขึ้น และ $H(e^{j\omega T_s})$ เข้าใกล้ $H_A(j\Omega)$ มากขึ้นภายในพิสัย $-\pi/T_s \leq \omega T_s \leq \pi/T_s$ ซึ่งเป็นการบ่งว่าการเหลื่อมของสเปกตรัมลดน้อยลง



รูป 2.9 เปรียบเทียบการตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟสระหว่าง
วงจรกรองสัญญาณอนาลอกและดิจิทัลจากวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์

a) $T_s = 10^{-4}$ วินาที

b) $T_s = 0.25 \times 10^{-5}$ วินาที



รูป 2.10 ความสัมพันธ์ระหว่างระนาบ s และระนาบ z
สำหรับวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์

ความสัมพันธ์ระหว่างระนาบ s และระนาบ z ในตอนนี้เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่างโพลและซีโรในระนาบ s กับโพลและซีโรในระนาบ z โดยวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ ในระนาบ z "แกน" ความถี่จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีเท่ากับ 1 โดย $\omega=0$ อยู่ที่ $z=1$ ในระนาบ s ความถี่ทั้งหลายจะอยู่บนแกนตั้งโดยมี $\Omega = 0$ อยู่ที่จุดกำเนิดจุดที่ความถี่มีค่าเป็นศูนย์ในระนาบทั้งสองนี้จะพ้องกัน โดยการเปรียบเทียบค่าความถี่แต่ละค่าในย่าน $-\pi/T_s \leq \Omega \leq \pi/T_s$ กับ $-\pi/T_s \leq \omega/T_s \leq \pi/T_s$ ดังแสดงในรูปที่ 2.10 เราจะพบว่าแกน $j\Omega$ ในย่านดังกล่าวจะถ่วงลงไปเป็นเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่ง และหากเราพิจารณาต่อไปอีก ก็จะพบว่าช่วง $(k-1)\pi/T_s \leq \Omega \leq (k+1)\pi/T_s$ สำหรับ k ที่เป็นเลขจำนวนเต็มใด ๆ เราจะพบว่าช่วงนี้ของแกน $j\Omega$ ในระนาบ s ก็จะถ่วงลงเป็นช่วง $-\pi/T_s \leq \omega/T_s \leq \pi/T_s$ บนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งในระนาบ z เช่นกัน โดยหลักเกณฑ์ดังกล่าวมานี้เราจึงสรุปได้ว่าครึ่งซ้ายของระนาบ s จะกลายเป็นพื้นที่ส่วนที่อยู่ภายในของวงกลมรัศมีหนึ่งและครึ่งขวาของระนาบ s จะกลายเป็นพื้นที่ส่วนที่อยู่นอกวงกลมรัศมีหนึ่งความสัมพันธ์ระหว่างระนาบ s กับระนาบ z เป็นไปอย่างมีเหตุผล เพราะว่าโพลของวงจรกรองสัญญาณนอกที่เสถียรต้องอยู่ด้านซ้ายของระนาบ s ขณะที่โพลของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่เสถียรก็ต้องอยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่ง

วิธีแปลงโพล ในตอนนี้เราจะหากฎของการแปลงโพลจากระนาบ s ไปสู่ระนาบ z เราจะเริ่มโดยการเขียน $H_A(s)$ ของวงจรกรองสัญญาณนอกให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันระบบลำดับที่หนึ่งดังนี้

$$H_A(s) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{s + a_k} \quad (2.27)$$

โดยที่ a_k อาจเป็นจำนวนเชิงซ้อน (Complex number) ฉะนั้นการตอบสนองอิมพัลส์ เขียนได้เป็นผลบวกของการตอบสนองอิมพัลส์ของแต่ละฟังก์ชันระบบลำดับที่หนึ่งดังนี้

$$h_A(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{-j a_k t} \quad (2.28)$$

จากนี้เราทำการสุ่มการตอบสนองอิมพัลส์ด้วยอัตราการสุ่มซึ่งมีคาบ T_s วินาทีทำให้ได้อนุกรมคิติดอลในแกนเวลาดังนี้

$$h(nT_s) = \sum_{k=1}^N a_k e^{-j a_k n T_s} \quad (2.29)$$

หากเรามองความสัมพันธ์ (2.29) ว่าเป็นอนุกรมคิติดอลสองค่าหนึ่งที่ลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล แล้วเราก็จะได้ว่าค่าที่ k ของอนุกรมนั้นมาจากวงจรกรองสัญญาณคิติดอลลำดับที่หนึ่งซึ่งมีโพลอยู่ที่ $z = e^{-a_k T_s}$ จากความเป็นเชิงเส้นของ z ทราנסฟอร์มทำให้เราเขียน (2.29) เป็นฟังก์ชันระบบ $H(z)$ ของวงจรกรองสัญญาณคิติดอลได้ว่า

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{1 - e^{-a_k T_s} z^{-1}} \quad (2.30)$$

โดยการเปรียบเทียบกับ (7.27) กับ (7.30) เราจะเห็นว่าโพล $s = -a_k$ ในระนาบ s แปลงไปเป็นโพล $z = e^{-a_k T_s}$ ในระนาบ z ฉะนั้นเราจึงสามารถเขียนกฎการแปลงโพลด้วยวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ได้ว่า

"โพลที่ตำแหน่ง $s = s_p$ ในระนาบ s จะแปลงเป็นโพลในระนาบ z ที่ตำแหน่ง $z = e^{s_p T_s}$ "

ซึ่งเมื่อเราตรวจสอบดูจะพบว่าโพลที่อยู่ด้านครึ่งซ้ายของระนาบ s จะแปลงไปเป็นโพลที่อยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งในระนาบ z นั่นก็คือวงจรกรองสัญญาณอนาลอกที่เสถียรจะแปลงไปเป็น วงจรกรองสัญญาณคิติดอลที่เสถียรเช่นกัน

การได้มาซึ่งกฎการแปลงโพลดังกล่าวข้างต้นนั้นเราเริ่มต้นจากความสัมพันธ์ 2.27 ซึ่ง $H_A(s)$ เขียนอยู่ในรูปของผลบวก ซึ่งจะหมายความว่าโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณจะต่อแบบขนาน แม้ว่าเรามีกฎการแปลงโพลดังกล่าวข้างต้นแก่การแปลงซีโรที่ตำแหน่งอื่นซึ่งมิใช่ จะไม่มีกฎเกณฑ์ที่

ถ้า อย่างไรก็ดีซีโรที่ $s=\infty$ จะถูกแปลงเป็นที่ซีโรที่ $z=0$ เราจะลองพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.7 เราจะใช้วิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์กับวงจรกรองสัญญาณอนาลอกที่สอง ซึ่งมี $H_A(s)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} H_A(s) &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} \\ &= \frac{s+a}{(s+a+jb) + (s+a-jb)} \end{aligned}$$

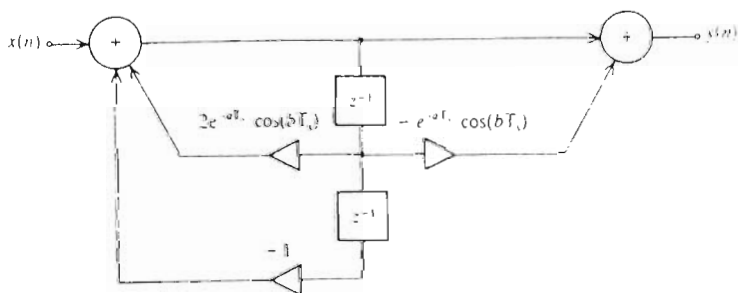
จาก

$$h_A(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos(bt) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$h(nT_s) = \begin{cases} e^{-anT_s} \cos(bnT_s) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

ถ้า z - ทรานส์ฟอร์มจาก $h(nT_s)$ คือ

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - e^{-aT_s} \cos(bT_s) z^{-1}}{1 - 2e^{-aT_s} \cos(bT_s) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - e^{-aT_s} \cos(bT_s) z^{-1}}{(1 - e^{-(a+jb)T_s} z^{-1})(1 - e^{-(a-jb)T_s} z^{-1})} \end{aligned}$$



รูป 2.11 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้จากวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์

ต่อไปเราต้องเลือกค่าการสุ่ม T_s เนื่องจากเราเคยพล็อตการตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก (ในตัวอย่างที่ 2.4) จากความถี่ 0 ถึง $10,000 \pi$ เรเดียน/วินาที เพื่อให้ความถี่ในดิจิตอลย่าน $[0, \pi/T_s]$ อยู่ในพิสัยที่เท่ากับในกรณีของอนาล็อก เราจะเลือก $T_s = 10^{-4}$ วินาที ซึ่งจะทำให้เราหาค่าตำแหน่งโพลในระนาบ ได้ว่า

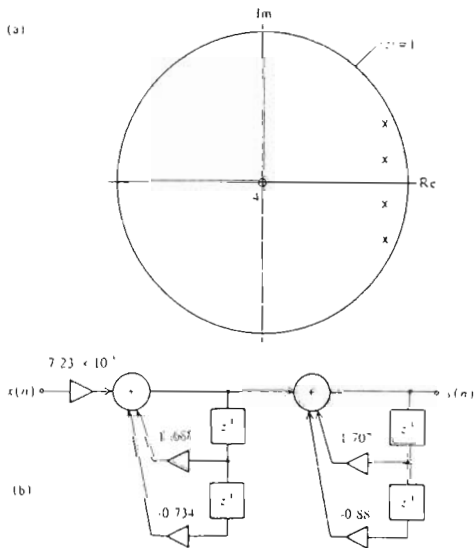
$$z_{1,2} = e^{s_{1,2} T_s} = e^{-0.155 \pm j0.177} = 0.857 e^{\pm j10.2^\circ}$$

$$z_{3,4} = e^{s_{3,4} T_s} = e^{-0.064 \pm j0.428} = 0.983 e^{\pm j24.5^\circ}$$

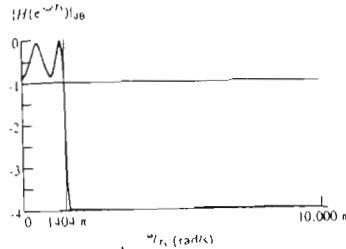
และซีโร 4 ตัวที่ $s = \infty$ จะแปลงไปเป็น $z = 0$ ฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลนี้จึงเขียนได้ว่าเป็น

$$H(z) = \frac{7.23 \times 10^{-3}}{(1 - 1.687 z^{-1} + 0.734 z^{-2})(1 - 1.707 z^{-1} + 0.88 z^{-2})}$$

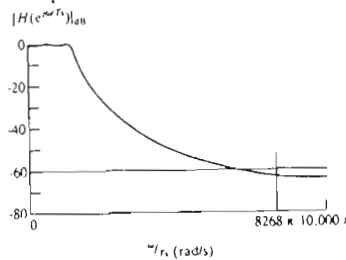
รูปที่ 2.12 แสดงตำแหน่งโพลและซีโรในระนาบ z กับแสดงการตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส สำหรับขนาดภายในย่านผ่านความถี่จะมีค่าสูงสุดเท่ากับ 1 หรือ 0 ดีบีนั่นเอง



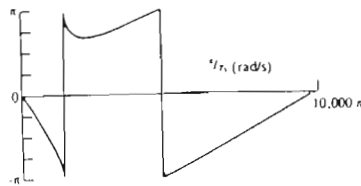
ย่านผ่านความถี่:



ย่านหยุดความถี่:



$\text{Arg}[H(e^{j\omega T_s})]$



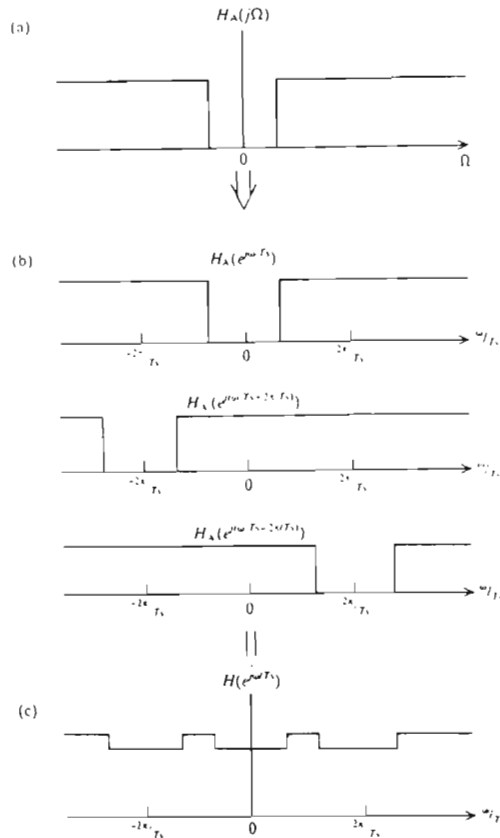
รูป 2.12 ผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล

ชนิดโลว์พาสแบบเชบีเชฟ

- ตำแหน่งโพลและซีโรของ $H_c(z)$
- โครงสร้างของวงจร
- การตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส

ถึงแม้ว่าจะมีประโยชน์ในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสและแบนพาส แต่วิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ไม่สามารถจะใช้ออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลจากวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกซึ่ง $H_A(j\Omega)$ มิได้เข้าใกล้ค่าศูนย์เมื่อ Ω มีค่าสูง ตัวอย่างเช่น วงจรกรองสัญญาณชนิดไฮพาส เป็นต้น ในกรณีดังกล่าวนี้ $H_A(j\Omega)$ มิได้มีค่าต่ำที่ความถี่สูง เพราะฉะนั้นไม่ว่า

คาบการสุ่ม T_s จะต่ำเพียงใดก็มีอาจป้องกันการเสื่อมอย่างมากมายของสเปกตรัมได้ดังแสดงในรูปที่ 2.13 ด้วยเหตุจากการเสื่อมอย่างมากมายนี้ทำให้วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้รับมีได้มีลักษณะเป็นไฮพาสส์เลย เพื่อที่จะเอาชนะปัญหาที่เกิดขึ้นนี้ เราจึงจำเป็นต้องมีวิธีอื่นที่สามารถแปลงแกน $j\Omega$ ทั้งแกน กล่าวคือทั้งย่าน $-\infty < \Omega < \infty$ เป็นเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่ง กล่าวคือ $-\pi/T_s < \omega/T_s < \pi/T_s$ แบบหนึ่งต่อหนึ่ง (unique) วิธีดังกล่าวนี้เรียกว่าวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ซึ่งจะกล่าวถึงในตอนต่อไปนี้



รูป 2.13 การเสื่อมอย่างมากมายของสเปกตรัมทำให้ไม่สามารถใช้วิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ออกแบบวงจรกรองสัญญาณชนิดไฮพาสส์ได้ การตอบสนองความถี่ขนาดของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกชนิดไฮพาสส์สเปกตรัมของการตอบสนองความถี่ภายหลังจากการสุ่มค่าตอบสนองความถี่ภายหลัง

2.4.2 วิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม เป็นวิธีที่แปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งของความถี่แต่ละจุดบนแกน $j\Omega$ ในระนาบ s ไปสู่ความถี่แต่ละจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งในระนาบ z วิธีการนี้ทำให้เราสามารถหาวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดไฮพาสส์จากวงจรกรอง

สัญญาณอนาลอกชนิดไฮพาสส์ได้ เพื่อให้กระจำมากขึ้นเราจะพิจารณาคณิตศาสตร์ของวิไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (2.31 \text{ a})$$

หรือ

$$z = \frac{sT_s/2+1}{sT_s/2-1} \quad (2.31 \text{ b})$$

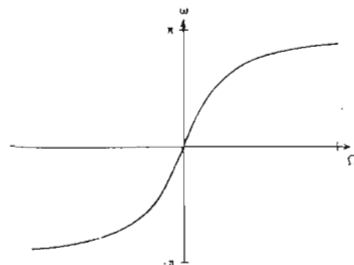
หากเราทราบ $H_A(s)$ เราจะใช้ (2.31 a) แทน s ทุกตัวใน $H_A(s)$ ด้วย $(2/T_s)(z-1)/(z+1)$ ก็จะทำให้ได้ $H(z)$ ที่ปรารถนา

ต่อไปเราจะศึกษาคุณสมบัติของวิไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล

ความสัมพันธ์ระหว่างระนาบ s และระนาบ z เพื่อที่จะแปลงความถี่ แต่ละจุดบนแกน $s = j\Omega$ ในระนาบ s ไปเป็นความถี่ แต่ละจุดบนเส้นรอบวง $z = e^{j\omega}$ ในระนาบ z เราจะแทนค่า $s = j\Omega$ และ $z = e^{j\omega}$ ลงในความสัมพันธ์ (2.31 b) ทำให้ได้ว่า (2.32)

ซึ่งเมื่อเทียบเฉพาะส่วนที่เป็นกำลังของเอ็กซิโพเนนเชียล เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง ω และ Ω ว่า

$$\begin{aligned} e^{j\omega} &= \frac{j\Omega T_s/2+1}{j\Omega T_s/2-1} = \frac{(\Omega^2 (T_s/2)^2 + 1)^{1/2} e^{j \arctan[\Omega T_s/2]}}{(\Omega^2 (T_s/2)^2 + 1)^{1/2} e^{j \arctan[-\Omega T_s/2]}} \\ &= e^{j 2 \arctan [\Omega T_s/2]} \end{aligned} \quad (2.32)$$



รูปที่ 2.14 ความสัมพันธ์แบบอาร์คแทนเจนท์ระหว่าง ω และ Ω อันเนื่องมาจากวิไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

ซึ่งเมื่อเทียบค่ากำลังแล้วเราจะได้ความสัมพันธ์

$$\omega = 2 \arctan [\Omega T_s / 2] \quad (2.33 \text{ a})$$

ซึ่งเป็นการแปลงทุกค่าบนแกน $j\Omega, -\infty < \Omega < \infty$ ในระนาบ s แบบหนึ่งต่อหนึ่ง ลงบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่ง, $-\pi < \omega < \pi$ ในระนาบ z คำว่าหนึ่งต่อหนึ่งจะหมายความว่าจุด ๆ หนึ่งบนแกน $j\Omega$ จะแปลงไปเป็นจุดเพียงจุดเดียวบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งจุดอื่น ๆ บนแกน $j\Omega$ จะไม่แปลงไปซ้อนที่จุดนั้นบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่ง ซึ่งคุณสมบัตินี้จะแตกต่างจากที่เราเคยพบในกรณีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ที่ว่า หลายจุดบนแกน $j\Omega$ จะแปลงไปซ้อนเป็นจุดเดียวบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่ง คุณสมบัติที่เด่นอันนี้เองที่ทำให้ไบเลนิเอรทรานส์ฟอร์มใช้แปลงวงจรกรองสัญญาณอนาลอกไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลโดยปราศจากปรากฏการณ์การเหลื่อมของสเปกตรัม ทำให้วงจรกรองสัญญาณอนาลอกทั้งชนิดโลว์พาสส์ ไฮพาสส์แบนด์พาสส์และแบนสตัดีปแปลงไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลได้ทั้งหมด

ทำนองเดียวกับในกรณีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ที่เราจะพบว่าครึ่งซ้ายของระนาบ s แปลงไปเป็นพื้นที่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งของระนาบ z และครึ่งขวาของระนาบ s แปลงไปเป็นพื้นที่ภายนอกของวงกลมดังกล่าว นั่นก็คือ วงจรกรองสัญญาณอนาลอกที่เสถียรเมื่อถูกแปลงด้วยวิธีไบเลนิเอรทรานส์ฟอร์มก็จะได้วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่เสถียรด้วย

ความสัมพันธ์ที่ (2.33 a) เขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan[\omega/2] \quad (2.33 \text{ b})$$

ซึ่งใช้ในการหา Ω จาก ω สำหรับที่ค่าต่ำ ๆ เราเขียน (2.33 b) ได้ว่า

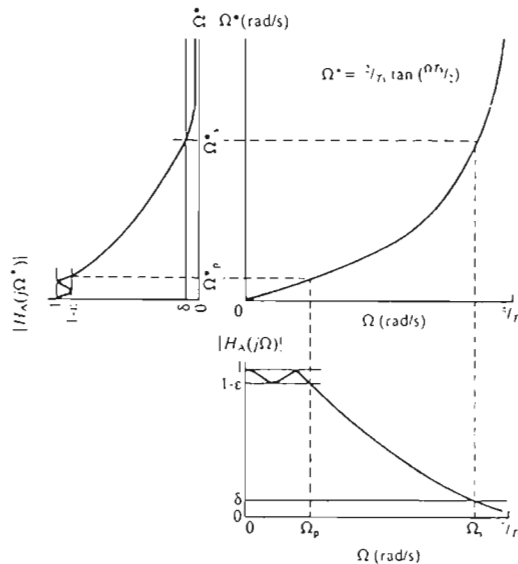
$$\Omega = \frac{2 \sin(\omega/2)}{T_s \cos(\omega/2)} = \frac{2(\omega/2 - \omega^3/8 + \dots)}{T_s (1 - \omega^2/4 + \dots)} = \omega/T_s \quad (2.34)$$

อันเป็นการแสดงว่าที่ Ω และ ω ต่ำ ๆ ความสัมพันธ์มีลักษณะเป็นเชิงเส้นแต่ที่ความถี่สูงขึ้นไปความสัมพันธ์ระหว่าง Ω และ ω จะไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งมาจากพื้นฐานที่ว่าความสัมพันธ์ (2.33 a) และ (2.33 b) ก็ไม่เป็นเชิงเส้นอยู่แล้ว ผลกระทบจากความไม่เป็นเชิงเส้นนี้ก็คือจะทำให้การตอบสนองความถี่ของทั้งขนาดและเฟสที่บริเวณ Ω ค่าสูง ๆ จะเพี้ยนเมื่อแปลงไปเป็นฟังก์ชันของ ω จากรูปที่ 2.14 และความสัมพันธ์ (2.33 a) ความเพี้ยนนี้จะมีลักษณะหดตัว (compression) กล่าวคือ Ω มีค่าได้ถึง $\pm\infty$ แต่จะหดตัวมาเป็น $-\omega$ ซึ่งมีค่าสูงสุดเพียง $\pm\pi$ เท่านั้น

การคัตล่วงหน้า (prewarping procedure) สำหรับวงจรกรองสัญญาณบางกลุ่มเราสามารถจะชดเชยการหดตัวเมื่อแปลง Ω ไปเป็น ω ได้เมื่อการตอบสนองความถี่ของขนาดมีค่าคงตัวเป็นช่วง (piece-wise constant) เราจะชดเชยได้ด้วยการคัตความถี่ Ω ล่วงหน้าไว้ก่อน กล่าวคือเราจะใช้ความสัมพันธ์

$$\Omega^* = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\Omega T_s}{2}\right) \quad (2.35)$$

คัต Ω ให้เป็น Ω^* ไว้ก่อน ดังแสดงในรูปที่ 2.15



รูป 2.15 การคัตความถี่ล่วงหน้า ข้อกำหนดเริ่มต้นบนแกน Ω จะถูกคัตเพื่อให้ได้ข้อกำหนดบนแกน Ω^*

จากนั้นเราจะออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกที่มี $|H_A(j\Omega^*)|$ เป็นไปตามข้อกำหนดในความถี่ Ω^* เมื่อเราใช้วิธีไบเลนิียร์ทรานส์ฟอร์มแปลงวงจรกรองสัญญาณนี้ การตอบสนองความถี่ขนาดของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้รับก็จะมีคุณสมบัติเป็นไปตามข้อกำหนดเริ่มต้นที่ต้องการ เราจะสังเกตความจริงนี้ได้จากการแทน Ω^* ลงใน (2.33 a) ทำให้ได้ว่า

$$\omega = 2 \arctan [\Omega^* T_s / 2] = \Omega T_s$$

ตัวอย่างเช่น ข้อกำหนดเริ่มต้นต้องการให้ความถี่สูงสุดของย่านผ่านความถี่อยู่ที่ Ω_p ดังนั้นเมื่อเราออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก เราจะคิดความถี่ Ω_p นี้ให้เป็น Ω_p^* ตามความสัมพันธ์ $\Omega_p^* = (2/T_s) \tan(\Omega_p/T_s)$ เมื่อแปลงด้วยวิธีไบเลียร์ทรานส์ฟอร์ม วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้รับจะมีความถี่สูงสุดของย่านผ่านความถี่อยู่ที่ $\omega_p/T_s = \Omega_p$ ตามต้องการ

เราจะเข้าใจการคิดล่วงหน้านี้น่ามากขึ้น เมื่อถึงตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลด้วยวิธีไบเลียร์ทรานส์ฟอร์ม

วิธีแปลงโพล ในตอนนี้เราจะหากฎการแปลงโพลจากระนาบ s ไปสู่ระนาบ z ตามกระบวนการไบเลียร์ทรานส์ฟอร์ม เราลองพิจารณาฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกซึ่งมีโพลที่ $s = s_p$ โดยที่ $s_p < 0$ กล่าวคือ

$$H_A(s) = \frac{1}{s - s_p} \quad (2.36)$$

โดยวิธีไบเลียร์ทรานส์ฟอร์มเราจะได้ว่า

$$H(z) = 1 / \left(\frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} - s_p \right) = \frac{T_s}{2 - s_p T_s} (1 + z^{-1}) / \left(1 - \frac{2 + s_p T_s}{2 - s_p T_s} z^{-1} \right) \quad (2.37)$$

เมื่อเปรียบเทียบตำแหน่งโพลในระนาบ s ของ (2.36) และตำแหน่งโพลในระนาบ z ของ (2.37) เราสามารถจะเขียนกฎการแปลงโพลด้วยวิธีไบเลียร์ทรานส์ฟอร์มได้ว่า

"โพลหนึ่งตัวที่ $s = s_p$ จะถูกแปลงไปเป็นซีโรหนึ่งตัวที่ $z = 1$ และโพลอีกหนึ่งตัวที่ $z = (2 + s_p T_s) / (2 - s_p T_s)$ ในระนาบ z "

โดยการพิจารณาคขนาดของโพลที่ได้รับในระนาบ z เราจะพบว่าโพลซึ่งวางตัวอยู่ด้านครึ่งซ้ายของระนาบ s จะแปลงไปเป็นโพลวางตัวอยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งของระนาบ z นั่นก็คือวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกที่เสถียรจะถูกแปลงไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่เสถียรเช่นกัน

ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงการประยุกต์วิธีไบเลียร์ทรานส์ฟอร์ม

ตัวอย่างที่ 2.9 เราจะทำการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิด โลว์พาสส์และมีลักษณะเชบีเชฟโดยมีข้อกำหนดดังนี้

ย่านผ่านความถี่ :

$$-1 < |H(j\Omega)|_{dB} \leq 0 \quad \text{สำหรับ } 0 \leq \Omega \leq 1404\pi \text{ rad/s} = 4411 \text{ rad/s}$$

ย่านหยุดความถี่ :

$$|H(j\Omega)|_{dB} \leftarrow -60 \text{ สำหรับ } \Omega \geq 8268\pi \text{ rad/s} = 25975 \text{ rad/s}$$

และกำหนดให้คาบการสุ่ม $T_s = 10^{-4}$ วินาที

วิธีทำ

การหาค่าความถี่คัตล่องหน้า เนื่องจากเราจะใช้วิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ฉะนั้นเราต้องคัตความถี่คัตล่องหน้าไว้ก่อน ค่าของความถี่ที่สำคัญที่เราต้องคัตล่องหน้าจะหาได้ดังนี้

$$\Omega_p^* = \frac{2}{T_s} \tan [\Omega_p T_s / 2] = 2 \times 10^4 \tan [0.0702\pi] = 4484 \text{ rad/s}$$

และ

$$\Omega_s^* = \frac{2}{T_s} \tan [\Omega_p T_s / 2] = 2 \times 10^4 \tan [0.4134\pi] = 71690 \text{ rad/s}$$

จากค่า Ω และ ω ที่หาได้นี้เรานำไปเขียนเป็นข้อกำหนดใหม่ของวงจรกรองสัญญาณนอกคัตนี้

ย่านผ่านความถี่ :

$$-1 < |H(j\Omega^*)|_{dB} \leq 0 \text{ for } 0 \leq \Omega^* \leq 4484 \text{ rad/s}$$

ย่านหยุดความถี่ :

$$|H(j\Omega^*)|_{dB} \leftarrow -60 \text{ for } \Omega^* \geq 71690 \text{ rad/s}$$

การหาค่า μ ค่า μ หาได้จากข้อกำหนดของขอบเขตที่อนุญาตให้ขนาดในย่านผ่านความถี่แปรไปได้ ซึ่งพบจากตัวอย่างที่ 2.4 ว่า $\mu = 0.508$

การหาค่า N ลำดับ N ของวงจรกรองสัญญาณนอกแบบเซบีเซฟนี้หาได้จาก

$$|H_c(j\Omega_s^*)|^2 = [1 + \mu^2 C_N(\Omega_s^*/\Omega_p^*)]^{-1} < 10^{-6}$$

ซึ่ง 10^{-6} มาจากค่า -60 ดีบี ในย่านหยุดความถี่ $\Omega_s/\Omega_p = 16$ เนื่องจากเราต้องหา N จาก $C_N(16)$ ที่ทำให้

$$C_N(16) > [(10^6 - 1)/\sigma^2]^{1/2} = 1969$$

ซึ่งพบว่า $N = 3$ ได้ $C_N(16) = 16301$ ฉะนั้น $N=3$ จึงเป็นค่าที่สูงเพียงพอ

การหาค่าแกนของวงรี รัศมีของวงกลมทั้งสองที่กำหนดแกนหลักและแกนรองของวงรีหาได้จากความสัมพันธ์ (2.15) ซึ่งทำให้ได้ $\rho = 4.17$ และค่ารัศมีหาได้ว่า

$$R = \frac{4484}{2} (4.17^{1/3} + 4.17^{-1/3}) = 5001$$

และ

$$r = \frac{4484}{2} (4.17^{1/3} - 4.17^{-1/3}) = 2216$$

จากความสัมพันธ์ (2.18) เราหาค่ามุมของโพลได้ว่า

$$s_1 = -2216$$

$$s_{2,3} = 2216 \cos(2\pi/3) \pm j5001 \sin(2\pi/3) = -1108 \pm j4331 = 4470 e^{\pm j104.4}$$

ซึ่งเมื่อเลือกเฉพาะมุมที่ให้โพลด้านครึ่งซ้ายของระนาบ s ทำให้เรานำไปเขียนฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณนอกได้ว่า

$$H_c(s) = \frac{4.43 \times 10^{10}}{[s + 2216][s^2 + 2223s + (4470)^2]}$$

การแปลงโพล เราใช้ความสัมพันธ์ (2.37) ทำการแปลงโพลแต่ละตัวจากระนาบ s ไปสู่ระนาบ z สำหรับ $s = s_1$ เราจะได้ชื่อหนึ่งตัวที่ $z = -1$ และโพลที่

$$z = \frac{2 + (-2216 \times 10^{-4})}{2 - (-2216 \times 10^{-4})} = 0.801$$

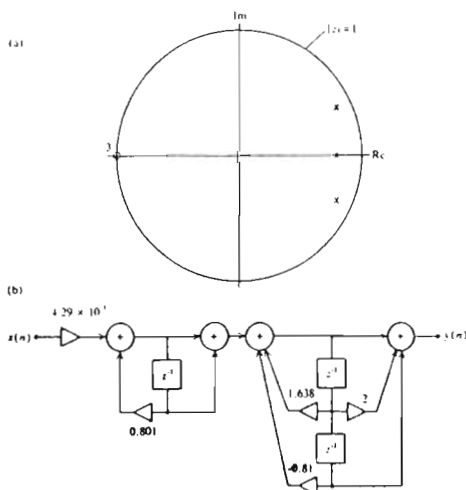
สำหรับ $s = s_{2,3}$ จะได้ชื่อสองตัวที่ $z = -1$ และโพลสองตัวที่

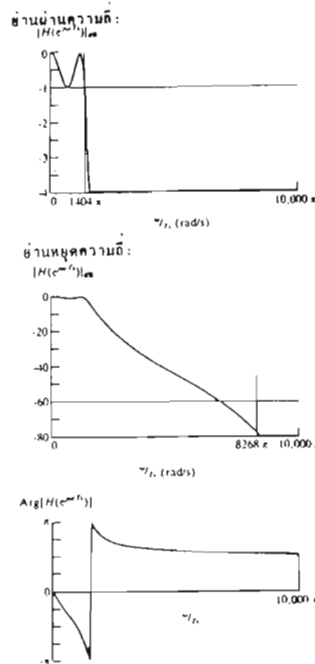
$$z = \frac{2 + (-1108 \pm j4331) \times 10^{-4}}{2 - (-1108 \pm j4331) \times 10^{-4}} = 0.819 \pm j0.373 = 0.90 e^{\pm j24.5^\circ}$$

ฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลจึงเขียนได้ว่าเป็น

$$H(z) = 4.29 \times 10^{-3} \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.801 z^{-1}} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.638 z^{-1} + 0.81 z^{-2}}$$

ตำแหน่งโพลและซีโร ไดอะแกรมโครงสร้างของวงจร และการตอบสนองความถี่ของขนาด และเฟสของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ได้รับแสดงอยู่ในรูปที่ 2.16 เราจะสังเกตจากตัวอย่างนี้กับตัวอย่างที่ 2.8 ซึ่งใช้ฟิล์มสื่อนาฬิกาในกรณีนี้เราใช้วงจรลำดับที่ 3 แทนที่จะเป็น 4 ดังนั้นตัวอย่างที่ 2.8 นั่นก็คือ ด้วยข้อกำหนดเดียวกันวิธีไบเนียร์ทรานส์ฟอร์มจะให้ลำดับที่ต่ำกว่า ผลที่ได้รับคือโครงสร้างของวงจรที่ประหยัดกว่า กล่าวคือ ใช้ตัวคูณ 4 ตัว และตัวหน่วง (delay) 3 ตัว เมื่อเทียบกับในวิธีฟิล์มสื่อนาฬิกาในตัวอย่างที่ 2.8 ซึ่งใช้ตัวคูณ 4 ตัวและตัวหน่วง 4 ตัว





รูป 2.16 ผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์
 และลักษณะเบบเชฟด้วยวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

- ตำแหน่งโพลและซีโรของ $H_c(z)$ โครงสร้างของวงจร
- การตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส

วิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มสำหรับโลว์พาสจะแปลงซีโรที่ $\Omega = \infty$ ในระนาบ s ไปสู่ซีโรที่ $\omega = \pi$ ในระนาบ z ดังปรากฏในตัวอย่างที่ 2.9 ซีโรเหล่านี้ทำให้เพิ่มการกำจัดสัญญาณในย่านผ่านความถี่ที่ความถี่สูง เมื่อเปรียบเทียบกับในเชิงนี้แล้ว จะพบว่าวิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ซีโรเหล่านี้จะปรากฏที่ $z = 0$ ซึ่งไม่ให้ผลกระทบประการใด ต่อการตอบสนองความถี่ของขนาด ดังนั้นวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มจึงให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าเมื่อเราหาวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลโดยการแปลงจากวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก

ขั้นตอน ในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดไฮพาสส์นั้น วิธีการที่นิยมทำคือ ออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกชนิดโลว์พาสส์แล้วแปลงไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ จากนั้นจึงใช้เทคนิคการแปลงวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดไฮพาสส์อีกทีหนึ่ง ในตอนต่อไปเราจะเรียนรู้เทคนิคการแปลงวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดอื่น ๆ

2.5 การแปลงความถี่เพื่อเปลี่ยนวงจรกรองสัญญาณชนิดโลว์พาสส์เป็นชนิดอื่น

เมื่อเราออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ได้แล้ว เราจะใช้วิธีแปลงความถี่เพื่อให้ได้มาซึ่งวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ที่มีความถี่ที่อ็อปพอน ไฮพาสส์ แบนด์พาสส์ และแบนด์รีเจ็คได้ การแปลงความถี่มีสูตรทางคณิตศาสตร์ดังแสดงในตารางที่ 2.2 ในการประยุกต์เราจะแทนทุกค่าของ z^{-1} ในวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์ต้นแบบด้วยค่าในตารางดังกล่าว ก็จะได้วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่เราปรารถนา

ในกรณีของโลว์พาสส์และไฮพาสส์ เราจะพบว่าสูตรการแปลงความถี่จะมีลักษณะคล้ายสูตรของไบเลนิเอร์ทรานส์ฟอร์ม ที่จริงแล้วการแปลงความถี่ก็คือการหาตำแหน่งใหม่ของจุดความถี่ที่สำคัญบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งนั่นเอง ความถี่ที่สำคัญในตารางที่ 2.2 ทำหน้าที่เป็นจุดอ้างอิง ซึ่งการตอบสนองความถี่ของขนาดที่จุดดังกล่าวของวงจรกรองสัญญาณต้นแบบและวงจรกรองสัญญาณใหม่ที่ได้รับจากการแปลงจะมีค่าเท่ากัน โดยทั่วไปแล้วความถี่ที่ขอบย่านผ่านความถี่เป็นจุดที่นิยมใช้เป็นจุดอ้างอิง เพื่อให้ค่าการตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรกรองสัญญาณต้นแบบและที่ ได้รับจากการแปลงมีค่าเท่ากัน

ตารางที่ 2.2 สูตรการแปลงความถี่จากชนิดโลว์พาสส์ ซึ่งมีความถี่อ้างอิง β ไปเป็นชนิดอื่นซึ่งมีความถี่อ้างอิง θ

Lowpass	$\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin[\frac{1}{2}(\beta - \theta)]}{\sin[\frac{1}{2}(\beta + \theta)]}$
Highpass	$-\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos[\frac{1}{2}(\beta + \theta)]}{\cos[\frac{1}{2}(\beta - \theta)]}$
Bandpass	$-\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U + \sigma_L)]}{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U - \sigma_L)]}$
$(\sigma_L$ is lower characteristic frequency σ_U is upper characteristic frequency)		$k = \cot[\frac{1}{2}(\sigma_U - \sigma_L)] \tan(\beta/2)$
Bandreject	$\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U + \sigma_L)]}{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U - \sigma_L)]}$
		$k = \tan[\frac{1}{2}(\sigma_U - \sigma_L)] \tan(\beta/2)$

2.5.1 การแปลงโพล เราจะพิจารณาการแปลงโพลอันเนื่องจากการแปลงความถี่ด้วยสูตรต่าง ๆ ในตารางที่ 2.2 เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันระบบพื้นฐานที่สำคัญ 2 ฟังก์ชัน ฟังก์ชันแรกมีซีโรหนึ่งที่ตัวที่ $z = c$ และโพลหนึ่งที่ตัวที่ $z = 0$ ซึ่งเขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$H_Z(z) = 1 - cz^{-1} \quad (2.38)$$

ฟังก์ชันพื้นฐานที่สองมีโพลหนึ่งที่ตัวที่ $z = d$ และมีซีโรหนึ่งที่ตัวที่ $z = 0$ ซึ่งเขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$H_P(z) = \frac{1}{1 - dz^{-1}} \quad (2.39)$$

ทั้ง c และ d อาจเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนได้

2.5.2 การแปลงโพลสำหรับการแปลงโลว์พาสส์เป็นโลว์พาสส์ โดยใช้สูตรการแปลงโลว์พาสส์เป็นโลว์พาสส์จากตารางที่ 2.2 กับ $H_Z(z)$ เราจะได้รับ $H_{LZ}(z)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} H_{LZ}(z) &= 1 - c \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \\ &= (1 + c\alpha) \frac{1 - [(\alpha + c)/(1 + c\alpha)]z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

ความสัมพันธ์นี้แสดงว่าโลว์พาสส์ที่มีซีโรที่ $z = c_1$ จะถูกแปลงไปเป็นซีโรใหม่ที่ $z = c_1$ โดยที่

$$c_1 = \frac{\alpha + c}{1 + c\alpha} \quad (2.41)$$

นอกจากนี้โพลที่ $z = 0$ จะถูกแปลงไปเป็นโพลที่ $z = \alpha$ ซึ่งเราจะสังเกตว่าซีโรใหม่จะสัมพันธ์กับค่า c ซึ่งเป็นตำแหน่งซีโรของโลว์พาสส์ต้นแบบ ขณะที่โพลใหม่จะไม่เกี่ยวข้องกับค่า c เลย

ต่อไปหากเราทำทำนองเดียวกันกับ $H_P(z)$ กล่าวคือใช้สูตรการแปลงโลว์พาสส์เป็นโลว์พาสส์จากตารางที่ 2.2 กับ $H_P(z)$ เราจะได้รับ $H_{PZ}(z)$ ดังนี้

$$H_{LP}(z) = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{(1 + d\alpha)(1 - [(\alpha + d)/(1 + \alpha d)]z^{-1})} \quad (2.42)$$

ความสัมพันธ์นี้แสดงว่า โพลของโลว์พาสส์คันแบบที่ตำแหน่ง $z = d$ ถูกแปลงเป็นโพลใหม่ที่ตำแหน่ง $z = (\alpha + d)/(1 + \alpha d)$ และซีโรเดิมที่ $z = 0$ ถูกแปลงเป็นซีโรใหม่ที่ตำแหน่ง $z = \alpha$ ตำแหน่งใหม่ของโพลจะสัมพันธ์กับ d ซึ่งเป็นตำแหน่งโพลของโลว์พาสส์คันแบบ ขณะที่ตำแหน่งใหม่ของซีโรมิได้สัมพันธ์กับ d เลย

เนื่องจาก $H_{LZ}(z)$ และ $H_{LP}(z)$ เป็นฟังก์ชันกลับเศษกลับส่วนซึ่งกันและกันดังนั้น หากฟังก์ชันของโลว์พาสส์คันแบบมีทั้งโพลและซีโรที่สำคัญ แล้วเราจะพบว่าจะมีการหักล้างระหว่างโพลและซีโรใหม่ที่ตำแหน่ง $z = \alpha$ หลังจากทำการแปลงความถี่เป็นผลสำเร็จแล้ว

เนื่องจากโพลทั้งหลายของวงจรกรองสัญญาณที่ใช้ในทางปฏิบัติจะมีตำแหน่งอยู่ใกล้เส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งมาก ซึ่งจะหมายถึงว่าค่าสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันระบบที่ได้รับจากวิธีแปลงความถี่จะไว (sensitive) ต่อการปัดทศนิยมมาก ค่าที่ผิดพลาดของสัมประสิทธิ์จะส่งผลกระทบให้ค่าขนาดในย่านผ่านความถี่เพี้ยนไปจนเกินขอบเขตที่กำหนดได้ เพื่อลดความไวของค่าสัมประสิทธิ์อันเนื่องจากการแปลงความถี่นี้ เราจะแปลงโพลทีละตัว ถึงแม้ว่าโพลนั้นจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนก็ตาม เราจะแสดงกระบวนการแปลงโลว์พาสส์เป็นโลว์พาสส์โดยวิธีแปลงความถี่ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.10 เราจะแสดงวิธีแปลงความถี่เพื่อแปลงโลว์พาสส์ให้เป็นโลว์พาสส์กล่าวคือเราจะใช้วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์แบบเชบีเชฟในตัวอย่างที่ 2.9 เป็นคันแบบ และแปลงให้เป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์แบบเชบีเชฟเช่นกัน แต่มีข้อกำหนดในย่านผ่านความถี่ใหม่ดังนี้

$$-1 < |H(e^{j\omega})|_{dB} \leq 0 \quad \text{for } 0 \leq \omega \leq 0.2808\pi \quad (\theta = 0.2808\pi)$$

วิธีทำ วงจรกรองสัญญาณโลว์พาสส์คันแบบมีขอบย่านผ่านความถี่อยู่ที่ $\omega = 0.1404\pi$ หรือตามตารางที่ 2.2 ก็คือ $\beta = 0.1404\pi$ ขณะที่วงจรกรองสัญญาณโลว์พาสส์ใหม่ที่ต้องการมีขอบย่านผ่านความถี่อยู่ที่ $\theta = 0.2808\pi$ หรือนั่นคือตามตารางที่ 2.2 $\beta = 0.2807$ นั่นเอง ทำให้เรากำหนดค่าคงตัว α ได้ดังนี้

$$\alpha = \frac{\sin[\frac{1}{2}(\beta - \theta)]}{\sin[\frac{1}{2}(\beta + \theta)]} = \frac{\sin(-0.0702\pi)}{\sin(0.2106\pi)} = -0.356$$

ฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณโลว์พาสส์แบบเชบีเชฟคันแบบสามารถจะเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$H_c(z) = A \frac{1+z^{-1}}{1-z_1 z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_2 z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_3 z^{-1}}$$

ซึ่งมีซีโรที่สำคัญสามตัวที่ $z = -1$ และโพลที่สำคัญสามตัวที่ $z = z_1$, $z = z_2$ และ $z = z_3$ ซีโรแต่ละตัวที่ $z = -1$ จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ที่ตำแหน่ง

$$z = \frac{\alpha - 1}{1 - \alpha} = -1$$

ซีโรทั้ง 3 ตัวของคันแบบต่างก็มีโพลที่ผูกพันด้วยอยู่ที่ $z = 0$ ซึ่งโพลเหล่านี้แต่ละตัวจะถูกแปลงเป็นโพลใหม่ (ตามที่เคยศึกษามาแล้วในตอนที่ 2.5.1) ที่

$$z = \alpha = -0.356$$

โพลที่สำคัญของวงจรกรองสัญญาณคันแบบ ที่ $z = z_i$ จะถูกแปลงไปเป็นโพลที่ตำแหน่งใหม่ดังนี้

$$c_1 = \frac{\alpha + z_i}{1 - \alpha z_i}$$

และโพลทั้ง 3 ตัวของคันแบบต่างก็มีซีโรที่ผูกพันด้วย อยู่ที่ $z = 0$ โดยที่ซีโรเหล่านี้จะถูกแปลงเป็นซีโรใหม่ที่ $z = \alpha = -0.356$ ซึ่งจะหักล้างกับโพลใหม่ที่ $z = \alpha = -0.356$ ข้างต้น เราคำนวณตำแหน่งใหม่ของโพลที่สำคัญทั้งสามตัวได้ ดังนี้

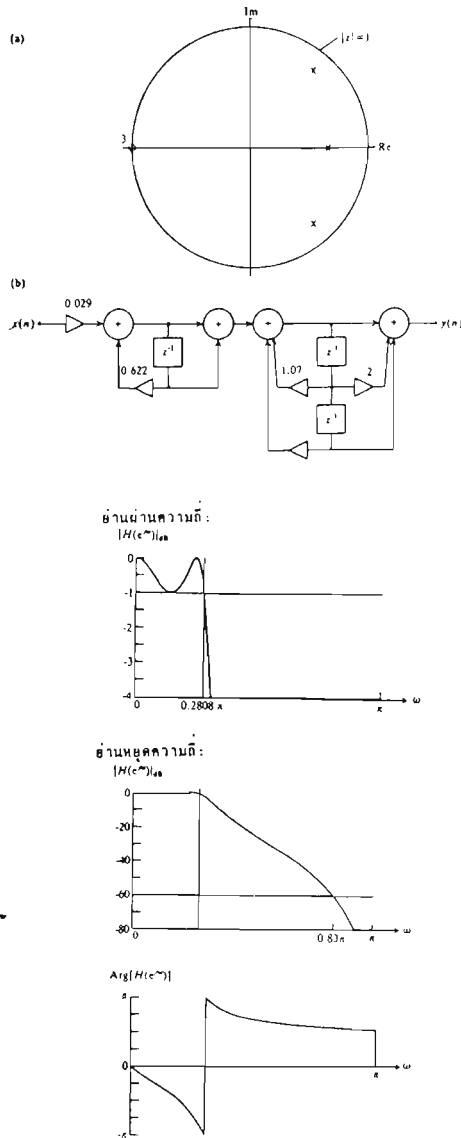
สำหรับ $z_1 = 0.801$, $c_1 = 0.622$

สำหรับ $z_2 = 0.819 + j0.373$ $c_2 = (0.462 + j0.373)/(0.709 - j0.133) = 0.824 e^{j49.5^\circ}$

สำหรับ $z_3 = 0.819 + j0.373$ $c_3 = 0.824 e^{j49.5^\circ}$

เราจึงได้ฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลโลว์พาสแบบเบิเพใหม่ดังนี้

$$H(z) = 0.029 \frac{1+z^{-1}}{1-0.622z^{-1}} \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.07z^{-1}+0.674z^{-2}}$$



รูป 2.17 ผลการใช้วิธีแปลงความถี่เพื่อแปลงวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลจากโลว์พาสเป็นโลว์พาส

- a) ตำแหน่งของโพลและซีโรของ $H(z)$ b) โครงสร้างของวงจร
c) การตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส

รูปที่ 2.17 แสดงตำแหน่งโพลและซีโร โคอะแกรมโครงสร้างของวงจรและการตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส เราสังเกตว่าในวงจรกรองสัญญาณต้นแบบ ถ้าตอบสนองความถี่ของขนาดมีค่า -60 ดีบี เมื่อ $\omega > 0.68\pi$ (ดูรูปที่ 2.16) แล้ววงจรกรองสัญญาณใหม่ที่รับจะมีขนาดคงที่ถ้า $\omega > 0.83\pi$ ความหมายก็คือ เราต้องตรวจสอบค่าขนาดในย่านหยุดความถี่ของวงจรกรองสัญญาณที่รับใหม่ทุกครั้ง ที่ออกแบบว่าเป็นไปตามที่เราต้องการหรือไม่เราต้องใช้วิธีตรวจสอบเท่านั้นเพราะเราไม่สามารถควบคุมย่านหยุดความถี่ได้ เมื่อเราใช้ย่านผ่านความถี่เป็นความถี่อ้างอิงในการแปลงอย่างไรก็ดีหากย่านหยุดความถี่มีความสำคัญมากกว่าเราก็สามารถใช้ความถี่ในย่านหยุดความถี่เป็นความถี่อ้างอิงในการแปลงได้เช่นกัน

2.5.3 การแปลงโพลสำหรับการแปลงจากโลว์พาสส์เป็นไฮพาสส์ โดยใช้สูตรการแปลงโลว์พาสส์เป็นไฮพาสส์จากตารางที่ 2.2 กับ $H_z(z)$ ใน (2.38) ทำให้ได้ $H_{HZ}(z)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} H_{HZ}(z) &= 1 + c \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \\ &= (1 + c\alpha) \frac{1 + [(c + \alpha)/(1 + c\alpha)]z^{-1}}{1 + \alpha z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

ความสัมพันธ์นี้แสดงให้เห็นว่าซีโรของโลว์พาสส์ที่ $z = c$ จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ของไฮพาสส์ที่ $z = -(c + \alpha)/(c + \alpha)$ และ โพลที่ $z = 0$ จะแปลงไปเป็น โพลใหม่ของไฮพาสส์ที่ $z = -\alpha$ ตำแหน่งของซีโรใหม่ที่รับจะสัมพันธ์กับค่า c แต่ตำแหน่งของโพลใหม่จะไม่ขึ้นอยู่กับค่า c เลย

ต่อไปเราใช้สูตรการแปลงโลว์พาสส์เป็นไฮพาสส์จากตารางที่ 2.2 กับ $H_P(z)$ ใน (7.39) ทำให้ได้ $H_{HP}(z)$ ดังนี้

$$H_{HP}(z) = \frac{1}{1 + d\alpha} \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 + [(d + \alpha)/(1 + \alpha d)]z^{-1}} \quad (2.44)$$

ทำให้ทราบว่าโพลเดิมของโลว์พาสส์ที่ตำแหน่ง $z = d$ จะถูกแปลงไปเป็นโพลใหม่ของไฮพาสส์ที่ตำแหน่ง $z = -(d + \alpha)/(1 + \alpha d)$ และซีโรเดิมที่ $z = 0$ จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ของไฮพาสส์ที่ $z = -\alpha$

เนื่องจาก $H_{HZ}(z)$ และ $H_{HP}(z)$ เป็นฟังก์ชันกลับเศษกับส่วนซึ่งกันและกัน ดังนั้นหากฟังก์ชันของโลว์พาสส์ต้นแบบมีทั้งโพลและซีโรที่สำคัญแล้ว เราจะพบว่าจะมีการหักล้างระหว่างโพลและซีโรใหม่ที่ตำแหน่ง $z = -\alpha$ หลังจากทำการแปลงความถี่เป็นผลสำเร็จแล้ว

ตัวอย่างที่ 2.11 เราจะแสดงวิธีแปลงโลว์พาสส์เป็นไฮพาสส์ด้วยวิธีแปลงความถี่สำหรับ วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดโลว์พาสส์แบบเชบีเชฟซึ่งเป็นต้นแบบเราจะใช้ผลจากตัวอย่างที่ 2.9 เพื่อแปลงไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดไฮพาสส์แบบเชบีเชฟ ซึ่งมีข้อกำหนดในย่านผ่าน ความถี่ดังนี้

$$-1 < |H(e^{j\omega})|_{dB} \leq 0 \quad \text{สำหรับ} \quad \pi/2 \leq \omega \leq \pi \quad (\theta = 0.5\pi)$$

วิธีทำ สำหรับ วงจร กรองสัญญาณ ดัน แบบความถี่ที่ขอบย่านผ่านความถี่อยู่ที่ $\omega = 0.1404\pi$ หรือนั่นคือ $\beta = 0.1404\pi$ และวงจรกรองสัญญาณชนิดไฮพาสส์ที่เราปรารถนามีความถี่ ขอบย่านผ่านความถี่ที่ 0.5π หรือนั่นคือ $\theta = 0.5\pi$ ทำให้เรากำหนดค่าคงตัว α ได้ว่า

$$\alpha = -\frac{\cos[\frac{1}{2}(\beta+\theta)]}{\cos[\frac{1}{2}(\beta-\theta)]} = -\frac{\cos(0.3202\pi)}{\cos(-0.1798\pi)} = -0.634$$

ฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณเชบีเชฟต้นแบบสามารถเขียนในรูปของ

$$H_c(z) = A \frac{1+z^{-1}}{1-z_1z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_2z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_3z^{-1}}$$

โดยมีซีโรที่สำคัญ 3 ตัวอยู่ที่ $z = -1$ และโพลที่สำคัญ 3 ตัวอยู่ที่ $z = z_1, z = z_2$ และ $z = z_3$ ซีโรแต่ละตัวที่ $z = -1$ จะแปลงไปเป็นซีโรที่

$$z = -\frac{-1+\alpha}{1-\alpha} = 1$$

และโพลที่ $z = 0$ (ซึ่งผูกพันกับซีโรที่ $z = -1$ นี้) จะแปลงไปเป็นโพลใหม่ที่ $z = -\alpha = 0.6337$ ทั้ง 3 ตัว โพลที่สำคัญของต้นแบบที่ $z = z_i$ จะแปลงไปเป็นโพลใหม่ที่ตำแหน่ง

$$c_i = -\frac{z_i + \alpha}{1 + \alpha z_i}$$

และซีโรที่ $z = 0$ (ซึ่งผูกพันกับโพลที่ $z = z_i$ นี้) จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ที่ $z = -\alpha = 0.6337$ ทั้ง 3 ตัว ซึ่งจะหักล้างกับโพลใหม่ที่ $z = -0.6337$ ที่ได้รับข้างต้น

ค่าแห่งโพลที่สำคัญใหม่จะมีค่าดังนี้

สำหรับ $z_1 = 0.801, \quad c_1 = 0.339$

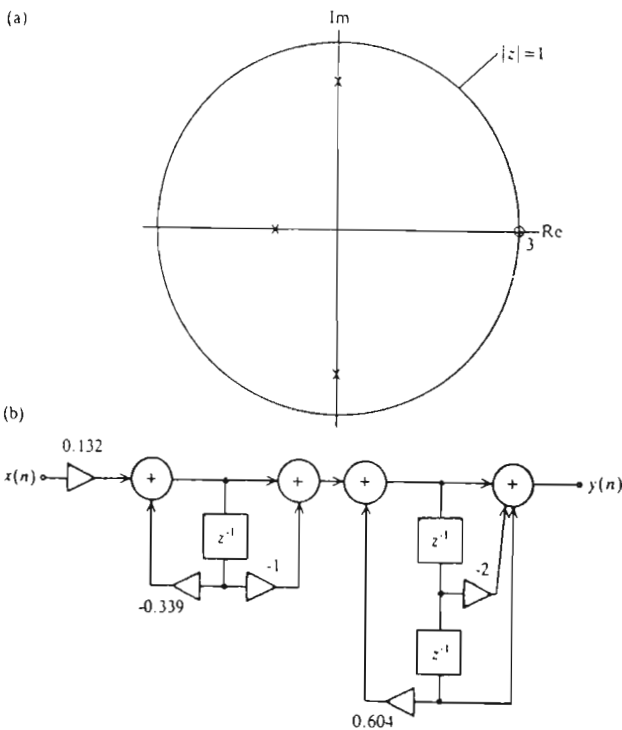
สำหรับ $z_2 = 0.819 + j0.373 \quad c_2 = -(0.1848 + j0.373)/(0.4813 - j0.2364) = 0.777 e^{j90.2^\circ}$

สำหรับ $z_3 = 0.819 - j0.373 \quad c_3 = 0.777 e^{j90.2^\circ}$

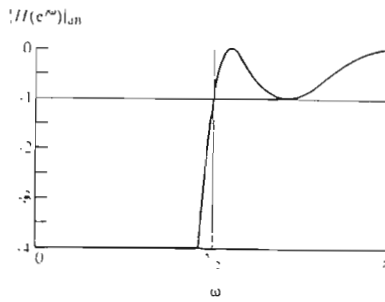
ทำให้นำมาเขียนเป็นฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบไฮพาสส์ลักษณะเซบีเชฟได้ว่า

$$H(z) = 0.132 \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.339 z^{-1}} \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.603 z^{-2}}$$

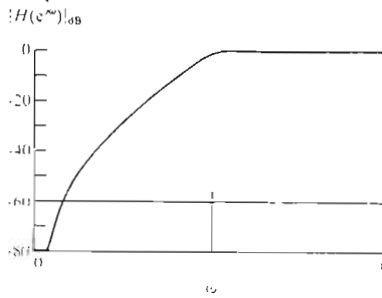
รูปที่ 2.18 แสดงผลของการออกแบบด้วยวิธีแปลงความถี่นี้ โดยแสดงค่าแห่งโพลและซีโร โคอะแกรมโครงสร้างวงจรและการตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส



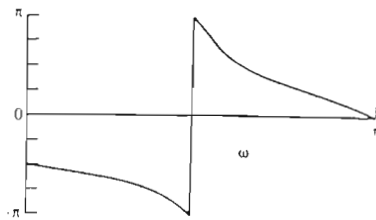
ย่านผ่านความถี่:



ย่านหยุดความถี่:



$\text{Arg}[H(e^j\omega)]$



รูป 2.18 ผลการใช้วิธีแปลงความถี่ทางจรรจงสัญญาณดิจิทัล
ชนิดไฮพาสส์แบบเชบีเชฟ a) ตำแหน่งโพลและซีโรของ $H(z)$
b) โครงสร้างวงจร c) การตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส

2.5.4 การแปลงโพลสำหรับการแปลงจากโลว์พาสส์เป็นแบนด์พาสส์ โดยใช้สูตรการแปลงโลว์พาสส์เป็นแบนด์พาสส์จากตารางที่ 2.2 กับ $H_z(z)$ ใน 2.38) ทำให้ได้ $H_{BZ}(z)$ ดังนี้

$$H_{BZ}(z) = 1 + c \frac{z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)]z^{-1} + [(k-1)/(k+1)]}{[(k-1)/(k+1)]z^{-2} - [2\alpha k/(k+1)]z^{-1} + 1}$$

$$= \frac{k+1+c(k-1) - 2\alpha k(c+1)z^{-1} + [k-1+c(k+1)]z^{-2}}{k+1-2\alpha k z^{-1} + (k-1)z^{-2}}$$

$$= \frac{[k+1+c(k-1)](1-c_1 z^{-1})(1-c_2 z^{-1})}{(k+1)(1-d_1 z^{-1})(1-d_2 z^{-1})} \quad (2.45)$$

ความสัมพันธ์นี้แสดงให้เห็นให้ทราบว่าซีโรของโลว์พาสส์ที่ $z = c$ จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ของแบนด์พาสส์สองตัวคือ ที่ $z = c_1$ และ $z = c_2$ โดยที่

$$c_1 = \frac{\alpha k(c+1) + \{\alpha^2 k^2 (c+1)^2 - [k+1+c(k-1)][k-1+c(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+c(k-1)} \quad (2.46 \text{ a})$$

$$c_2 = \frac{\alpha k(c+1) - \{\alpha^2 k^2 (c+1)^2 - [k+1+c(k-1)][k-1+c(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+c(k-1)} \quad (2.46 \text{ b})$$

นอกจากนี้สิ่งที่เกิดขึ้นด้วยคือ โพลที่ $z = 0$ จะแปลงไปเป็นโพลใหม่ 2 ตัวที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$d_1 = \frac{\alpha k + [\alpha^2 k^2 - (k+1)(k-1)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.47 \text{ a})$$

$$d_2 = \frac{\alpha k - [\alpha^2 k^2 - (k+1)(k-1)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.47 \text{ b})$$

ตำแหน่งของซีโรใหม่จะสัมพันธ์กับค่า c ซึ่งเป็นตำแหน่งของซีโรเดิมของโลว์พาสส์ต้นแบบ แต่ตำแหน่งของโพลใหม่จะไม่ขึ้นกับค่า c เลย

ต่อไปเราทำการใช้สูตรแปลงโลว์พาสส์เป็นแบนด์พาสส์จากตารางที่ 2.2 กับ $H_p(z)$ ใน (2.39) ทำให้ได้ $H_{BP}(z)$ ดังนี้

$$H_{BP}(z) = \frac{(k+1)(1-d_1 z^{-1})(1-d_2 z^{-1})}{[k+1+c(k-1)](1-c_1 z^{-1})(1-c_2 z^{-1})} \quad (2.48)$$

ความสัมพันธ์นี้แสดงให้เห็นให้ทราบว่าโพลของโลว์พาสส์ที่ $z = d$ จะแปลงไปเป็นโพล 2 ตัวที่ $z = c_1$ และ $z = c_2$ โดยที่

$$c_1 = \frac{-\alpha(d-1) + \{\alpha^2 (d-1)^2 - [k+1+d(k-1)][1-k-d(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+d(k-1)} \quad (2.49 \text{ a})$$

$$c_2 = \frac{-\alpha(d-1)\{-\alpha^2(d-1)^2 - [k+1+d(k-1)][1-k-d(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+d(k-1)} \quad (2.49 \text{ b})$$

ขณะเดียวกันซีโรที่ $z = 0$ แปลงไปเป็นซีโร 2 ตัวที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$d_1 = \frac{\alpha + [\alpha^2 - (k+1)(1-k)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.50 \text{ a})$$

$$d_2 = \frac{\alpha - [\alpha^2 - (k+1)(1-k)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.50 \text{ b})$$

ตำแหน่งของโพลใหม่จะสัมพันธ์กับค่า d ซึ่งเป็นตำแหน่งของโพลเดิมของโลว์พาสส์ ขณะที่ตำแหน่งของซีโรใหม่จะไม่สัมพันธ์กับค่า d เลย

เราตั้งข้อสังเกตว่า $H_{BZ}(z)$ และ $H_{PZ}(z)$ เป็นฟังก์ชันที่กลับเศษกลับส่วนซึ่งกันและกันเพราะฉะนั้น หากฟังก์ชันของโลว์พาสส์ต้นแบบมีทั้งโพลและซีโรที่สำคัญแล้ว เราจะพบว่าโพลใหม่และซีโรใหม่ที่ $z = d_1$ และ d_2 จะหักล้างซึ่งกันและกันเมื่อเราทำการแปลงความถี่เป็นผลสำเร็จแล้ว

ตัวอย่างที่ 2.12 เราจะใช้เทคนิคการแปลงความถี่ แปลงวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลชนิด โลว์พาสส์แบบเชบีเฟฟให้เป็นวงจรกรองสัญญาณชนิดแบนด์พาสส์สำหรับโลว์พาสส์ต้นแบบนั้นเราจะใช้ ผลจากตัวอย่างที่ 2.9 ส่วนวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลชนิดแบนด์พาสส์แบบเชบีเฟฟนั้นเราจะให้ย่าน ผ่านความถี่มีข้อกำหนดดังนี้

$$-1 < |H(e^{j\omega})|_{dB} \leq 0 \quad \text{สำหรับ} \quad 0 \leq \omega \leq 0.421\pi \text{ and } 0.608\pi \leq \omega \leq \pi$$

วิธีทำ จากข้อกำหนดของแบนด์พาสส์เราได้ว่า $\sigma_L = 0.421\pi$ และ $\sigma_U = 0.608\pi$ และ โลว์พาสส์ต้นแบบมี $\omega = 0.1404\pi$ ดังนั้นเราจึงทำการคำนวณหาค่า α และ k ได้ดังนี้

$$\alpha = \frac{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U + \sigma_L)]}{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U - \sigma_L)]} = \frac{\cos(0.515\pi)}{\cos(0.094\pi)} = -0.0486$$

$$k = \tan[\frac{1}{2}(\sigma_U - \sigma_L)] \tan(\beta/2) = \tan(0.094\pi) \tan(0.070\pi) = 0.068$$

ผลคูณ αk จะเท่ากับ -0.0360 ฟังก์ชันระบบของโลว์พาสส์แบบเชบีเชฟคันแบบสามารถจะเขียนในรูปของ

$$H_c(z) = A \frac{1+z^{-1}}{1-z_1 z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_2 z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_3 z^{-1}}$$

ซึ่ง $H_c(z)$ จะมีซีโรที่สำคัญ 3 ตัวอยู่ที่ตำแหน่ง $z = -1$ และมีโพลที่สำคัญ 3 ตัวอยู่ที่ $z = z_1, z = z_2$ และ $z = z_3$ ซีโรแต่ละตัวที่ $z = -1$ จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ 2 ตัว ที่ตำแหน่ง $z = c_1$ และ $z = c_2$ โดยที่

$$c_{1,2} = \frac{\pm \{-[k+1-(k-1)][k-1-(k+1)]\}^{1/2}}{k+1-(k-1)} = \pm 1$$

และโพลแต่ละตัวที่ $z = 0$ (ซึ่งผูกพันกับซีโรที่ $z = -1$) จะแปลงไปเป็นโพลใหม่ 2 ตัว ที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$\begin{aligned} d_{1,2} &= \frac{\alpha k \pm [\alpha^2 k^2 - (k+1)(k-1)]^{1/2}}{k+1} \\ &= \frac{-0.036 \pm [0.0129 + 0.4519]^{1/2}}{1.7403} = -0.021 \pm 0.392 \end{aligned}$$

ต่อไปโพลสำคัญของคันแบบที่ตำแหน่ง $z = z_i$ จะแปลงไปเป็นโพลใหม่ 2 ตัวที่ตำแหน่ง

$$c_{i,1,2} = \frac{-0.036(z_i + 1) \pm (0.013(z_i + 1)^2 - [1.740 - 0.260 z_i][-0.260 + 1.740 z_i])^{1/2}}{1.740 - 0.260 z_i}$$

และซีโรแต่ละตัวที่ $z = 0$ (ซึ่งผูกพันกับโพลที่ $z = z_i$) จะแปลงไปเป็นซีโร 2 ตัว ตำแหน่ง $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$d_{1,2} = \frac{\alpha k \pm [\alpha^2 k^2 - (k+1)(k-1)]^{1/2}}{k+1} = -0.021 \pm 0.392$$

ซึ่งซีโรที่ $d_{1,2}$ นี้จะหักล้างกับโพลที่ $d_{1,2}$

ตำแหน่งของโพลใหม่ที่มาจาก $z = z_i$ จะหาได้ดังนี้

$$z_1 = 0.801 \quad c_{1,1,2} = -0.0422 \pm j0.859 = 0.860 e^{\pm j92.8^\circ}$$

$$z_2 = 0.819 + j0.373, \quad c_{2,1} = 0.221 - j0.906 = 0.932 e^{-j76.3^\circ}$$

$$c_{2,2} = -0.305 + j0.883 = 0.934 e^{j109.1^\circ}$$

$$z_3 = 0.819 - j0.373 \quad c_{3,1} = -0.221 + j0.906 = 0.932 e^{j76.3^\circ}$$

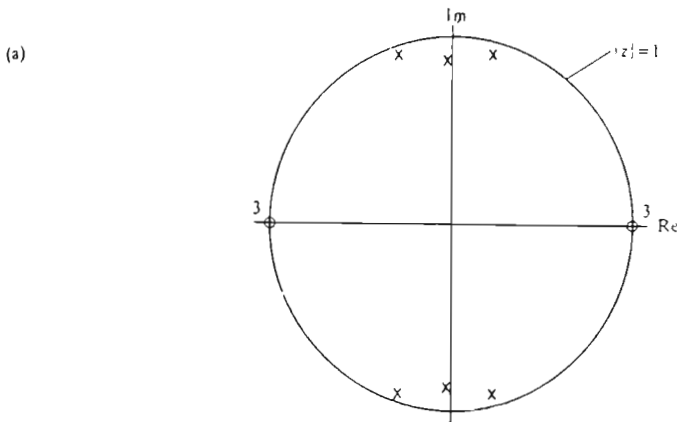
$$c_{3,2} = -0.305 - j0.883 = 0.934 e^{-j109.1^\circ}$$

เราจึงได้ฟังก์ชันระบบของแบนด์พาสส์ที่ปรารถนาดังนี้

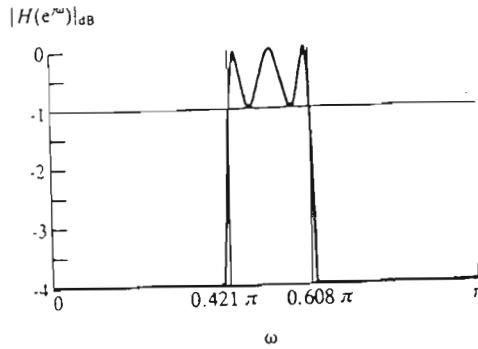
$$H(z) = 9.58 \times 10^{-3} \frac{1-z^{-2}}{1-0.441z^{-1}+0.869z^{-2}}$$

$$\times \frac{1-z^{-2}}{1+0.084z^{-1}+0.74z^{-2}} \frac{1-z^{-2}}{1+0.611z^{-1}+0.872z^{-2}}$$

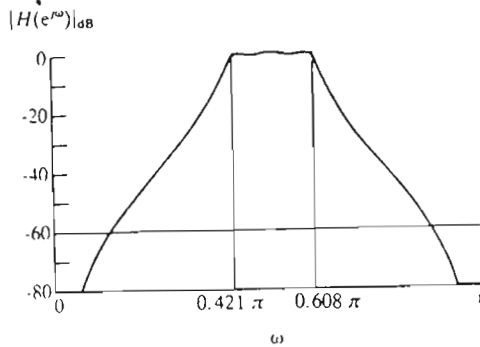
ตำแหน่งโพลและซีโรในระนาบ z โคออร์เดเกตมโครงสร้างวงจรและการตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟสของแบนด์พาสส์ที่ได้นี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.19



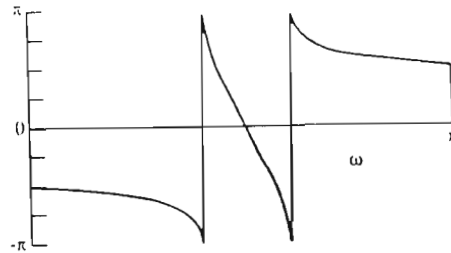
ย่านผ่านความถี่:



ย่านหยุดความถี่:



$\text{Arg}[H(e^{j\omega})]$



รูป 2.19 ผลจากการใช้วิธีแปลงความถี่แปลงจากโลว์พาสส์เป็นแบนด์พาสส์

- ตำแหน่งโพลและซีโรของ $H(z)$
- โครงสร้างวงจร
- การตอบสนองของขนาดและเฟส

2.5.5 การแปลงโพลสำหรับการแปลงจากโลว์พาสส์เป็นแบนด์รีเจ็ค โดยใช้สูตรการแปลงโลว์พาสส์เป็นแบนด์รีเจ็คจากตารางที่ 2.2 กับ $H_Z(z)$ ทำให้ได้ $H_{RZ}(z)$ ดังนี้

$$H_{RZ}(z) = 1 - c \frac{z^{-2} - [2\alpha/(k+1)]z^{-1} + [(1-k)/(k+1)]}{[(1-k)z^{-2}/(k+1)] - [2\alpha/(k+1)]z^{-1} + 1}$$

$$= \frac{[k+1+c(k-1)](1-c_1 z^{-1})(1-c_2 z^{-1})}{(k+1)(1-d_1 z^{-1})(1-d_2 z^{-1})} \quad (2.51)$$

ความสัมพันธ์นี้แสดงว่าซีโรของโลว์พาสส์ที่ $z = c$ แปลงไปเป็นซีโรใหม่ 2 ตัวที่ $z = c_1$ และ $z = c_2$ โดยที่

$$c_1 = \frac{-\alpha(c-1) + \{\alpha^2(c-1)^2 - [k+1+c(k-1)][1-k-c(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+c(k-1)} \quad (2.52 \text{ a})$$

และ

$$c_2 = \frac{-\alpha(c-1) - \{\alpha^2(c-1)^2 - [k+1+c(k-1)][1-k-c(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+c(k-1)} \quad (2.52 \text{ b})$$

ขณะเดียวกันโพลที่ $z = 0$ แปลงไปเป็นโพลใหม่ที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$d_1 = \frac{\alpha + [\alpha^2 - (k+1)(1-k)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.53 \text{ a})$$

$$d_2 = \frac{\alpha - [\alpha^2 - (k+1)(1-k)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.53 \text{ b})$$

ตำแหน่งของซีโรใหม่จะสัมพันธ์กับ c ซึ่งเป็นตำแหน่งซีโรเดิมของโลว์พาสส์ ขณะที่ตำแหน่งของโพลใหม่จะไม่ขึ้นกับค่า c เลย

ต่อไปเมื่อเราใช้สูตรการแปลงโลว์พาสส์เป็นแบนด์รีเจ็คจากตารางที่ 2.2 กับ $H_P(z)$ เราจะได้ $H_{RP}(z)$ ซึ่งกลับเศษกลับส่วนกับ $H_{RZ}(z)$ ดังนี้

$$H_{RP}(z) = \frac{(k+1)(1-d_1 z^{-1})(1-d_2 z^{-1})}{[k+1+d(k-1)](1-c_1 z^{-1})(1-c_2 z^{-1})} \quad (2.54)$$

ความสัมพันธ์นี้ทำให้เราทราบว่าโพลของโลว์พาสส์ที่ $z = d$ จะแปลงไปเป็นโพล 2 ตัวที่ $z = c_1$ และ $z = c_2$ โดยที่

$$c_1 = \frac{-\alpha(d-1) + \{\alpha^2(d-1)^2 - [k+1+d(k-1)][1-k-d(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+d(k-1)} \quad (2.55 \text{ a})$$

และ

$$c_2 = \frac{-\alpha(d-1) - \{\alpha^2(d-1)^2 - [k+1+d(k-1)][1-k-d(k+1)]\}^{1/2}}{k+1+d(k-1)} \quad (2.55 \text{ b})$$

ขณะเดียวกันซีโรที่ $z = 0$ แปลงไปเป็นซีโร 2 ตัวที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$d_1 = \frac{\alpha + [\alpha^2 - (k+1)(1-k)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.56 \text{ a})$$

$$d_2 = \frac{\alpha - [\alpha^2 - (k+1)(1-k)]^{1/2}}{k+1} \quad (2.56 \text{ b})$$

เราสังเกตว่าตำแหน่งของโพลใหม่จะสัมพันธ์กับ d ซึ่งเป็นค่าตำแหน่งโพลเดิมของโลว์พาสส์ ขณะที่ตำแหน่งของซีโรมิได้ขึ้นอยู่กับค่า d เลย

เนื่องจาก $H_{RZ}(z)$ และ $H_{RP}(z)$ เป็นฟังก์ชันที่กลับเศษกลับส่วนซึ่งกันและกัน ดังนั้น หากฟังก์ชันระบบของโลว์พาสส์ต้นแบบมีทั้งโพลและซีโรที่สำคัญแล้ว เราจะพบว่าโพลใหม่และซีโรใหม่ที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ จะหักล้างซึ่งกันและกัน เมื่อเราทำการแปลงความถี่เป็นผลสำเร็จแล้ว

ตัวอย่างที่ 2.13 เราจะใช้การแปลงความถี่ทำการแปลงโลว์พาสส์เป็นแบนด์รีเจ็คโดยวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลชนิดโลว์พาสส์แบบเชบีเชฟซึ่งเป็นต้นแบบจะใช้ผลจากตัวอย่างที่ 2.9 ส่วนวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลชนิดแบนด์รีเจ็คจะมีข้อกำหนดในย่านผ่านความถี่ดังนี้

$$-1 < |H(e^{j\omega})|_{dB} \leq 0 \quad \text{for } 0 \leq \omega \leq 0.421\pi \quad \text{และ} \quad 0.608\pi \leq \omega \leq \pi$$

วิธีทำ จากข้อกำหนดของแบนด์รีเจ็คเราได้ว่า $\sigma_L = 0.412\pi$ และ $\sigma_U = 0.608\pi$ ส่วนวงจรกรองสัญญาณโลว์พาสส์ต้นแบบมี $\beta = 0.1404\pi$ จึงทำให้เราหาค่า α และ k ได้ดังนี้

$$\alpha = \frac{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U + \sigma_L)]}{\cos[\frac{1}{2}(\sigma_U - \sigma_L)]} = \frac{\cos(0.515\pi)}{\cos(0.094\pi)} = -0.0486$$

$$k = \tan \left[\frac{1}{2} (\sigma_U - \sigma_L) \right] \tan (\beta/2) = \tan (0.094\pi) \tan (0.070\pi) = 0.068$$

ฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณต้นแบบชนิดโลว์พาสส์แบบเชบีเชฟสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$H_c(z) = A \frac{1+z^{-1}}{1-z_1 z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_2 z^{-1}} \frac{1+z^{-1}}{1-z_3 z^{-1}}$$

โดย $H_c(z)$ มีซีโรที่สำคัญ 3 ตัว อยู่ที่ $z = -1$ และโพลที่สำคัญ 3 ตัวอยู่ที่ $z = z_1, z = z_2$ และ $z = z_3$ ซีโรแต่ละตัวที่ $z = -1$ จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ 2 ตัวที่ $z = c_1$ และ $z = c_2$ โดยที่

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{2\alpha \pm \{4\alpha^2 - [k+1-(k-1)][1-k+k+1]\}^{1/2}}{k+1-(k-1)} = \alpha \pm (\alpha^2 - 1)^{1/2} \\ &= -0.0486 \pm j0.0999 = e^{\pm j92.8^\circ} \end{aligned}$$

ขณะที่โพลที่ $z = 0$ (ซึ่งผูกพันกับซีโรที่ $z = -1$) นี้จะแปลงไปเป็นโพลใหม่ 2 ตัวที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$\begin{aligned} d_{1,2} &= \frac{\alpha \pm [\alpha^2 - (k+1)(1-k)]^{1/2}}{k+1} \\ &= \frac{-0.0486 \pm [0.0024 + 0.995]^{1/2}}{1.068} = -0.0455 \pm 0.934 \end{aligned}$$

โพลที่สำคัญของโลว์พาสส์ต้นแบบที่ $z = z_i$ จะแปลงไปเป็นโพลใหม่ 2 ตัวที่

$$c_{1,2} = \frac{0.0486(z_i - 1) \pm \{ (0.024(z_i + 1)^2 - [1.068 - 0.932 z_i][0.932 + 1.068 z_i] \}^{1/2}}{1.068 - 0.932 z_i}$$

และซีโรที่ $z = 0$ (ซึ่งผูกพันกับโพลที่ $z = z_i$) จะแปลงไปเป็นซีโรใหม่ 2 ตัวที่ $z = d_1$ และ $z = d_2$ โดยที่

$$d_{1,2} = \frac{\alpha \pm [\alpha^2 - (k+1)(k-1)]^{1/2}}{k+1} = -0.0455 \pm 0.934$$

ซึ่งโพลใหม่ 2 ตัวที่ $d_{1,2}$ นี้จะหักล้างกับซีโรใหม่ 2 ตัวที่ $d_{1,2}$ ที่หามาก่อนแล้ว
ตำแหน่งของโพลใหม่ที่มาจาก $z = z_i$ จะหาได้ดังนี้

$$z_1 = 0.801 \quad c_{1,1,2} = 0.489 e^{\pm j93.5^\circ}$$

$$z_2 = 0.819 + j0.373 \quad c_{2,1} = 0.932 e^{-j109.2^\circ}$$

$$c_{2,2} = 0.931 e^{j76.2^\circ}$$

$$z_3 = 0.819 - j0.373 = z_2^* \quad c_{3,1} = 0.932 e^{j109.2^\circ}$$

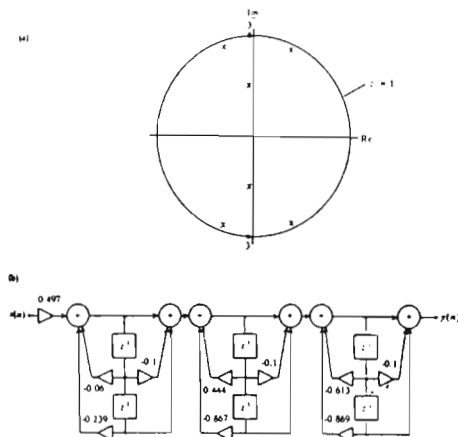
$$c_{3,2} = 0.931 e^{-j76.2^\circ}$$

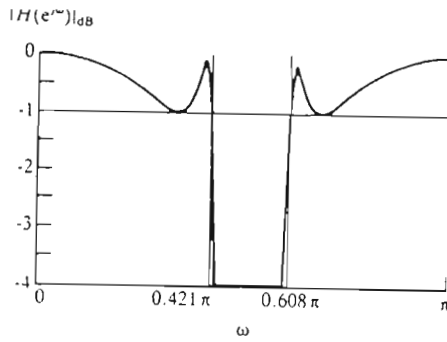
ฟังก์ชันระบบของแบบครีเจ็คที่ปรารถนาจึงเขียนได้เป็น

$$H(z) = 0.497 \frac{1 - 0.1z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.06z^{-1} + 0.239z^{-2}}$$

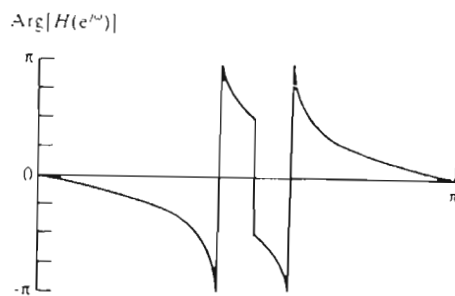
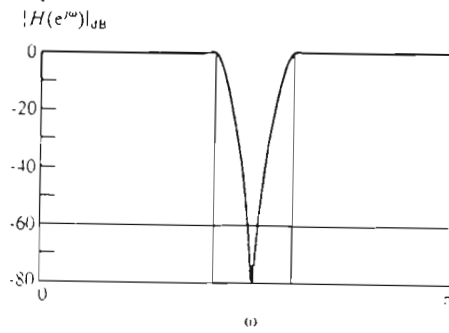
$$\times \frac{1 - 0.1z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.444z^{-1} + 0.867z^{-2}} \frac{1 - 0.1z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.613z^{-1} + 0.869z^{-2}}$$

รูปที่ 2.20 แสดงตำแหน่งโพลและซีโร โค้ดแกรมโครงสร้างของวงจรและการตอบสนอง
ความถี่ของขนาดและเฟส ของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลตัวชนิดแบบครีเจ็คและลักษณะเชบีเชฟ





ย่านหยุดความถี่ :



รูป 2.20 ผลจากการใช้วิธีแปลงความถี่จากโดเมนเวลาเป็นแบนด์พาส

- ตำแหน่งโพลและซีโรของ $H(z)$
- โครงสร้างวงจร
- การตอบสนองความถี่ของขนาดและเฟส

2.6 วงจรกรองสัญญาณชนิดออลพาสส์

บรรดาวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทไอโออาร์ที่เราได้ศึกษามาโดยตลอดนั้นล้วนแล้วแต่มีการตอบสนองความถี่ของเฟสที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นทั้งสิ้น ในบางโอกาสของการประยุกต์ เราอาจจำเป็นต้องใช้การตอบสนองความถี่เฟสที่มีความเป็นเชิงเส้นโดยเฉพาะในย่านผ่านความถี่ ส่วนในย่านหยุดความถี่นั้นไม่จำเป็นเท่าไรเพราะขนาดของสัญญาณในย่านนี้จะถูกกำจัดอยู่ในคอนนี้เราจะศึกษาการชดเชยเฟสด้วยวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่เรียกว่าออลพาสส์ (all-pass) โดยการต่อวงจรนี้อนุกรมกับวงจรที่เราต้องการชดเชยเฟส

โดยนิยามแล้ววงจรกรองสัญญาณชนิดออลพาสส์นี้จะมีค่าตอบสนองความถี่ของขนาดเท่ากันที่ทุกความถี่ แต่ค่าตอบสนองความถี่ของเฟสมีค่าที่มีไขว้นขึ้นไปหมดที่ทุกความถี่ เราจะลองพิจารณาวงจรกรองสัญญาณออลพาสส์ทั้งลำดับที่ 1 และ 2 ดังต่อไปนี้

วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดออลพาสส์ลำดับที่หนึ่ง ซึ่งจะมีฟังก์ชันระบบดังนี้

$$H_{AP}(z) = \frac{1-r^{-1}z^{-1}}{1-rz^{-1}} \quad \text{โดยที่ } |r| < 1 \quad (2.57)$$

กล่าวคือมีโพลหนึ่ง ตัวที่ $z = r$ และซีโร 1 ตัวที่ $z = r^{-1}$ และเพื่อความเสถียร $|r| < 1$ เราสามารถแสดงให้เห็นว่าการตอบสนองความถี่ของขนาดมีค่าเท่ากัน ที่ทุกความถี่โดยการคำนวณหาขนาดกำลังสองดังนี้

$$\begin{aligned} H_{AP}(e^{j\omega}) H_{AP}(e^{j\omega}) &= \frac{(1-r^{-1}e^{-j\omega})(1-r^{-1}e^{j\omega})}{(1-re^{-j\omega})(1-re^{j\omega})} \\ &= \frac{1-2r^{-1}\cos(\omega)+r^{-2}}{1-2r\cos(\omega)+r^2} = r^{-2} \end{aligned} \quad (2.58)$$

ส่วนการตอบสนองความถี่ของเฟสหาได้จาก

$$\begin{aligned} H_{AP}(e^{j\omega}) &= \frac{(1-r^{-1}e^{-j\omega})(1-re^{j\omega})}{(1-re^{-j\omega})(1-re^{j\omega})} \\ &= \frac{2-(r+r^{-1})\cos(\omega)-j(r-r^{-1})\sin(\omega)}{1-2r\cos(\omega)+r^2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

ซึ่งมีเฟสที่ต้องการดังนี้

$$\text{Arg} [H_{AP} (z)] = \arctan \left[\frac{-(r-r^{-1}) \sin (\omega)}{2-(r+r^{-1}) \cos (\omega)} \right] \quad (2.60)$$

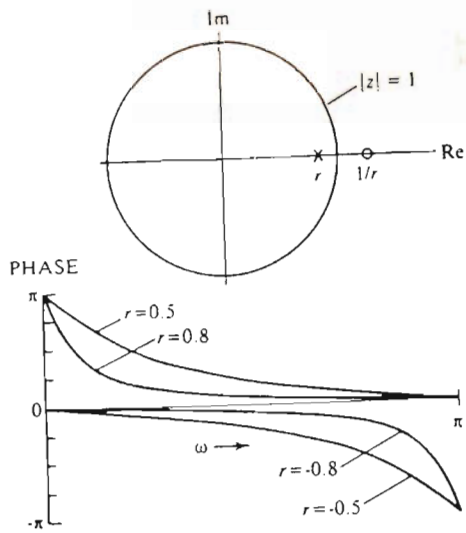
การตอบสนองความถี่ของเฟสที่ค่า r ต่าง ๆ แสดงอยู่ในรูปที่ 2.21 เมื่อให้ $0 < r < 1$ ซีโร่จะอยู่บนแกนบวกจริงและเฟสระหว่าง $0 < \omega < \pi$ จะมีค่าเป็นบวกโดยที่ $\omega = 0$ มีค่าเท่ากับ π และค่อยๆ ลดลงเป็น 0 ที่ $\omega = \pi$ เมื่อให้ $-1 < r < 0$ ซีโร่จะอยู่บนแกนลบจริงและเฟสระหว่าง $0 < \omega < \pi$ จะมีค่าเป็นลบ โดยที่มีค่าเป็น 0 ที่ $\omega = 0$ และลดลงเป็น $-\pi$ ที่ $\omega = \pi$ เนื่องจากซีโร่อยู่บนวงกลมรัศมีหนึ่ง เฟสจึงมีค่าลดลงด้วยปริมาณ π เสมอเมื่อแปรจาก 0 ไปเป็น π รูปลักษณะของการตอบสนองความถี่ของเฟสจะเปลี่ยนไปเมื่อเราเปลี่ยนค่า r

วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลสองขั้วที่แสดง ซึ่งจะหาได้จากการอนุญาติให้ r เป็นค่าเชิงซ้อนและให้ทั้งโพลและซีโร่มีคอนจูเกต ทำให้เขียนฟังก์ชันระบบได้ว่า

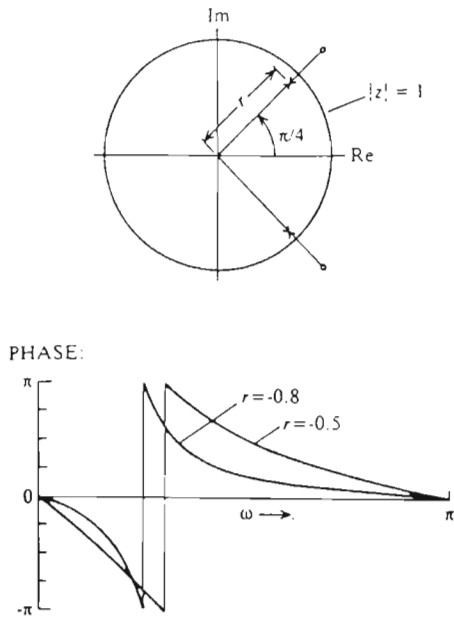
$$\begin{aligned} H_{AP} (z) &= \frac{(1-r^{-1} z^{-1})(1-r^{-1*} z^{-1})}{(1-r z^{-1})(1-r^* z^{-1})} \\ &= \frac{1-2 \operatorname{Re}(r^{-1}) z^{-1} + |r^{-1}|^2 z^{-2}}{1-2 \operatorname{Re}(r) z^{-1} + |r|^2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

การตอบสนองความถี่ของเฟสที่ค่า r ต่าง ๆ แสดงอยู่ในรูปที่ 2.22 เนื่องจากเรามีซีโร่สองตัวอยู่บนวงกลมรัศมีหนึ่ง เมื่อ $r > 0$ ทำให้เฟสที่ $\omega = 0$ มีค่า 2π หรือเท่ากับ 0 นั่นเองหาก $r < 0$ เฟสที่ $\omega = 0$ จะมีค่าเท่ากับ 0 อีก นอกจากนี้เนื่องจากเรามีซีโร่สองตัวอยู่บนวงกลมรัศมีหนึ่ง ทำให้เฟสมีค่าลดลงด้วย ปริมาณ 2π เมื่อ ω แปรจาก 0 ไปสู่ π

ดังนั้นโดยการใช่วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลสองขั้วที่อนุกรมกับวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลอื่นที่เราปรารถนาจะชดเชยเฟสและจากการเลือกค่า r ที่เหมาะสมเราก็จะพิจารณา ชดเชยเฟสตามที่ต้องการได้ อย่างไรก็ตามก็มีการชดเชยจะทำได้เฉพาะในย่านความถี่แคบ ๆ เท่านั้นและการชดเชยก็จะมีข้อจำกัดตรงที่ว่าวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลสองขั้วที่กล่าวถึงมานี้ล้วนแต่มีลักษณะของเฟสเป็นไปในทางที่ลดลงเมื่อความถี่สูงขึ้น



รูป 2.21 ตำแหน่งโพลและซีโรในระนาบ z และการตอบสนองความถี่ของเฟสของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดออลพาสส์ลำดับที่หนึ่ง



รูป 2.22 ตำแหน่งโพลและซีโรในระนาบ z และการตอบสนองความถี่ของเฟสของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดออลพาสส์ลำดับที่สอง

2.7 สรุป

ในบทนี้เราได้แสดงเทคนิคการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกทั้งลักษณะ บัตเตอร์เวิร์ท เชบีเชฟ และ เอลลิปติก ในระนาบ s สำหรับข้อกำหนดหนึ่ง ๆ เราจะพบว่าในทั้งสามลักษณะนี้ เทคนิคการออกแบบบัตเตอร์เวิร์ทจะง่ายที่สุดแต่ต้องใช้ลำดับสูงที่สุด ขณะที่เอลลิปติกจะให้ ลำดับ ต่ำสุด แต่เทคนิคการออกแบบยากที่สุด ส่วนเชบีเชฟจะอยู่ตรงกลาง ๆ ซึ่งให้ความพอเหมาะระหว่างลำดับของวงจร (ซึ่งจะหมายถึงค่าใช้จ่ายของชิ้นส่วนฮาร์ดแวร์) และความยากง่ายในการออกแบบ (ซึ่งจะหมายถึงค่าใช้จ่ายในการออกแบบ)

เราได้ทำความเข้าใจการแปลงโพลและซีโรจากระนาบ s ไปสู่ระนาบ z โดยวิธีอิมพัลส์ อินแวเรียนซ์และวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม โพลและซีโรในระนาบ ที่ได้รับนี้จึงนำไปสร้าง เป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลตามที่เคยอธิบายมาแล้วในบทก่อน ๆ สำหรับการออกแบบโลว์พาสส์นั้นเราจะพบว่าวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มจะให้ผลที่ดีกว่าเพราะซีโรที่ ในระนาบ s จะถูกแปลง ไปสู่ตำแหน่ง $z = -1$ ในระนาบ z ขณะที่วิธีอิมพัลส์อินแวเรียนซ์จะแปลงไปสู่ตำแหน่ง $z = 0$

ต่อจากนั้นเราได้ศึกษาวิธีแปลงความถี่ซึ่งใช้ประโยชน์ในการแปลงวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลต้นแบบซึ่งเป็นชนิดโลว์พาสส์ไปเป็นชนิดอื่นอันได้แก่ ไฮพาสส์ แบนด์พาสส์ และแบนด์รีจิกในตอนที่ท้ายเราได้เรียนรู้เรื่องวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลชนิดอลพาสส์ซึ่งใช้ในการชดเชยเฟสของ วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลไออาร์อื่น ซึ่งเป็นประโยชน์ในการชดเชยให้เฟสในย่านผ่านความถี่มีความเป็นเชิงเส้นมากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] T.W. Parks and C.S. Burrus, Digital Filter Design, John Wiley & Sons, 1987
- [2] C.M. Rader and B. Gold, Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain, Proc. IEEE, Vol. 55, pp. 149-171, February 1967
- [3] R. Kuc, Introduction to Digital Signal Processing, McGraw-Hill International, 1988.

บทที่ 3

วงจรรองสัญญาณ ดิจิตอลประเภท เอ็ฟไออาร์

3.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะอธิบายกระบวนการออกแบบวงจรรองสัญญาณดิจิตอล ประเภทเอ็ฟไออาร์ ซึ่งการตอบสนองค่าหนึ่งจะมีจำนวนที่นับได้ ตรงข้ามกับวงจรรองสัญญาณประเภทไอไออาร์ ซึ่งการตอบสนองค่าหนึ่งจะมีจำนวนอนันต์

วงจรรองสัญญาณดิจิตอลประเภทเอ็ฟไออาร์มีข้อได้เปรียบวงจรรองสัญญาณดิจิตอลประเภทไอไออาร์อยู่ 2 ประการ ประการแรกเราสามารถจะออกแบบให้มีการตอบสนองความถี่ของเฟสมีความเป็นเชิงเส้นได้โดยแท้จริง และประเภทที่สอง วงจรรองสัญญาณดิจิตอลประเภทเอ็ฟไออาร์จะเสถียรเสมอ เนื่องจากโครงสร้างปราศจากส่วนป้อนกลับ (feedback path) ขณะที่วงจรรองสัญญาณดิจิตอลประเภทไอไออาร์ จะได้เปรียบตรงที่ว่าด้วยข้อกำหนดเดียวกันจะใช้ลำดับที่ต่ำกว่าวงจรรองสัญญาณประเภทเอ็ฟไออาร์มาก ซึ่งจะหมายถึงการทำงานของวงจรรองสัญญาณดิจิตอลประเภทไอไออาร์จะเร็วกว่าและใช้หน่วยความจำที่น้อยกว่ามาก ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่าย

หมายเหตุ การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์กระทำได้หลายวิธี แต่เพื่อให้อยู่ในขอบเขตของหนังสือเล่มนี้ เราจะพิจารณาเพียงสองวิธี วิธีแรกเรียกว่าวิธีหน้าต่าง (window method) ซึ่งมีหลักการที่สำคัญอยู่ตรงที่ว่า เราทราบค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_D(n)\}$ ของวงจรที่เราปรารถนาหรือไม่ และค่าตอบสนองดังกล่าวมีจำนวนที่สิ้นสุดหรือไม่ หากเราทราบค่าและจำนวนที่สิ้นสุดของ $\{h_D(n)\}$ เราก็จะออกแบบได้โดยง่าย หากเราทราบค่าของ $\{h_D(n)\}$ แต่ทว่าจำนวนของ $\{h_D(n)\}$ มีถึงอนันต์ เราจำเป็นต้องทอนให้เหลือจำนวนที่สิ้นสุดเพียง N จำนวน โดยที่ N เป็นเลขจำนวนเต็มที่สิ้นสุดเช่นกัน และเราเขียนค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ทอนลงแล้วด้วยสัญลักษณ์ $\{h_D(n)\}$ การทอนลงนี้เราจำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันหน้าต่างช่วย วิธีการนี้จึงเรียกว่าวิธีหน้าต่าง ปกติแล้ว $\{h_D(n)\}$ จะได้มาจากข้อกำหนดของการตอบสนองความถี่ของขนาด $|H_D(e^{j\omega})|$ และค่าตอบสนองเฟสที่เหมาะสม ซึ่ง $\{h_D(n)\}$ ก็คืออินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ $|H_D(e^{j\omega})|$ นั่นเอง ในทางปฏิบัตินั้นเราอาจหาอินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มในรูปของสูตรสำเร็จได้ ซึ่งเป็นการสะดวก แต่บ่อยครั้งที่เราไม่อาจหาในลักษณะสูตรสำเร็จดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มไม่ต่อเนื่อง (Discrete Fourier Transform) ช่วยในการหา $\{h_D(n)\}$ จาก $|H_D(e^{j\omega})|$ เราเรียกวิธีการนี้โดยย่อ ๆ ว่า วิธีดีเอฟที จากคำย่อภาษาอังกฤษ DFT จากคำเต็ม Discrete Fourier Transform ทำให้ได้วิธีที่สองในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ โดยเรียกวิธีนี้ว่า วิธีดีเอฟทีผสมหน้าต่าง

3.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์ด้วยวิธีหน้าต่าง

จากบทก่อน ๆ เราทราบว่าฟังก์ชันระบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์เขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$H_{FIR}(z) = \sum_{n=-N_F}^{N_P} b_k z^{-k} \tag{3.1}$$

หากเราทราบค่าสัมประสิทธิ์ $b_k, -N_F \leq k \leq N_P$ เราก็สามารถนำไปสร้างเป็นวงจรโดยใช้โครงสร้างแบบนันรีคอร์ซีฟ จากคุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์เราทราบว่าสัมประสิทธิ์ดังกล่าวและค่าตอบสนองค่าหนึ่งนั้นมีค่าเท่ากัน หรือ

$$h(n) = b_n \text{ for } -N_F \leq n \leq N_P \tag{3.2}$$

ซึ่งนั่นก็คือ เราสามารถสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์ได้โดยตรงจากค่าตอบสนองค่าหนึ่ง

ต่อไปเราจะศึกษาให้ชัดเจนมากขึ้นโดยทำความเข้าใจเรื่องแรกคือการสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์ซึ่งมีค่าตอบสนองค่าหนึ่งประมาณค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่เรารปรารถนาและเรื่องที่ สอง คือ การ ทำให้ วงจร กรอง สัญญาณ ดิจิตอล ประเภทเอ็ฟไออาร์มีค่าตอบสนองความถี่เป็น ไป ตามเงื่อนไขของข้อกำหนด

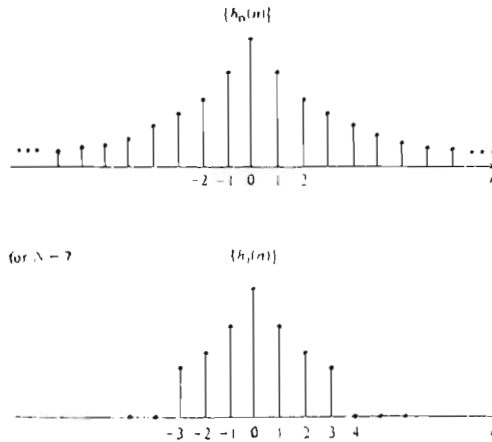
โดยปกติแล้วเราจะออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์ให้มีการตอบสนองความถี่ของเฟสมีความเป็นเชิงเส้น ซึ่งกระทำได้โดยมีเงื่อนไขว่าค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ปรารถนา $\{h_D(n)\}$ จะต้องมี ลักษณะ สมมาตร (symmetry) กล่าวคือ $\{h_D(n)\}$ เป็น จำนวน ที่ สิ้นสุด และสมมาตรในช่วง $-N_F \leq n \leq N_P$ โดยที่ $N_F = N_P$ (อันเนื่องมาจากความสมมาตร) หาก $\{h_D(n)\}$ มีลักษณะดังกล่าวมานี้ เราจะสามารถสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็ฟไออาร์ที่มีค่าตอบสนองค่าหนึ่ง ตรงตาม $\{h_D(n)\}$ ที่กำหนดมาให้ได้อย่างแม่นยำ โดยทำให้สัมประสิทธิ์ b_n เท่ากับ $h_D(n)$ หรือนั่นคือ

$$b_n = h_D(n) \quad \text{โดยที่} \quad -N_F \leq n \leq N_P \quad (3.3)$$

แต่ในทางปฏิบัติเรามักจะพบปัญหาตรงที่ว่าข้อกำหนดทางอุดมคติจะทำให้ $\{h_D(n)\}$ มีจำนวนอนันต์หรือนั่นคือจำนวนไม่สิ้นสุด ตัวอย่างเช่น วงจรกรองสัญญาณโลว์พาสส์อุดมคติ จะมี $\{h_D(n)\}$ จำนวนอนันต์ เป็นต้น โดยหลักการแล้วเราจะพิสูจน์ได้เสมอว่า $\{h_D(n)\}$ จะมีจำนวนอนันต์เสมอหากค่าตอบสนองความถี่ของขนาด $|H(e^{j\omega})|$ หรืออนุพันธ์ใด ๆ ของ $|H(e^{j\omega})|$ มีความไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) กรณีที่ $\{h_D(n)\}$ มีจำนวนถึงอนันต์ดังนี้เราจำเป็นต้องตัดทอนจำนวนให้เหลือเป็นจำนวน N ที่สิ้นสุด และเขียนค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ตัดทอนแล้วนี้ว่า $\{h_P(n)\}$

จากการที่เราต้องการให้ การตอบสนองความถี่ของเฟสมีความเป็นเชิงเส้นเสมอทำให้ ค่าตอบสนองค่าหนึ่งต้องมีความสมมาตรคู่ (even symmetry) หรือความสมมาตรคี่ (antisymmetry) รอบจุดใดจุดหนึ่งในแกนเวลา เพื่อไม่ให้ซับซ้อนเกินไปเราลองพิจารณากรณีที่ $\{h_D(n)\}$ สมมาตรรอบจุด $n=0$ หรือนั่นคือ

$$h_D(n) = h_D(-n) \quad (3.4)$$



รูป 3.1 เปรียบเทียบค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_D(n)\}$ ซึ่งมีจำนวนอนันต์ และค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_N(n)\}$ จำนวน 7 ค่าซึ่งเป็นการประมาณ $\{h_D(n)\}$

ในการตัดทอนให้เหลือจำนวน N เราต้องรักษาให้ $\{h_D(n)\}$ ที่ได้รับยังคงมีความสมมาตรรอบ ๆ จุด $n=0$ ด้วย ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ทำให้เราเขียนค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวน N ดังกล่าวโดยที่ N เป็นเลขจำนวนเต็มคู่ได้ดังนี้

$$h_N = \begin{cases} h_D(n) & \text{สำหรับ } -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 0 & \text{สำหรับ } N \text{ อื่น ๆ} \end{cases} \quad (3.5)$$

หากเราประสงค์จะให้วงจรกรองสัญญาณมีลักษณะเชิงเหตุ (causal) เราต้องหั่น $\{h_D(n)\}$ ตามแกนเวลาด้วยปริมาณ $(N-1)/2$ เพื่อให้ $\{h_D(n)\}$ เริ่มต้นที่ $n=0$ เราตั้งข้อสังเกตด้วยว่าหาก N เป็นเลขจำนวนเต็มคี่แล้วจุดสมมาตรจะตรงกับตำแหน่งค่าที่ถูกกลุ่มค่าใดค่าหนึ่งพอดี แต่หาก N เป็นเลขจำนวนเต็มคู่ แล้วจุดสมมาตรจะอยู่ตรงตำแหน่งระหว่างค่าที่ถูกกลุ่มสองค่า

เพื่อประโยชน์ของการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ เราจะเปรียบเทียบการตัดทอนว่าเสมือนหนึ่งการคูณค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่เรารารถนาซึ่งมีจำนวนอนันต์ $\{h_D(n)\}$ ด้วยค่าหน้าต่าง ซึ่งมีสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ว่า $\{w(n)\}$ ดังนั้นเราเขียนคณิตศาสตร์ของการได้มาซึ่ง $\{h_D(n)\}$ ว่า

$$h_N(n) = h_D(n) w(n) \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n \quad (3.6)$$

$$w(n) = w(-n) \neq 0 \quad \text{สำหรับ } |n| \leq (N-1)/2$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับ } |n| > (N-1)/2 \quad (3.7)$$

$\{w(n)\}$ มีจำนวนที่สิ้นสุดคือจำนวน N ค่าและสมมาตรรอบจุด $n = 0$ เพื่อจะยังคงรักษาความสมมาตรซึ่งมีอยู่เดิมใน $\{h_D(n)\}$

เราจึงพอสรุปการ ออกแบบ ด้วยวิธี หน้าต่างว่า จากค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวนอนันต์ที่ปรารถนา $\{h_D(n)\}$ เราต้องเลือกค่า $\{w(n)\}$ ที่จะให้ได้ค่าตอบสนองค่าหนึ่ง จำนวนสิ้นสุด $\{h_D(n)\}$ ซึ่งมีค่าตอบสนองความถี่ของขนาดตรงตามเงื่อนไขของข้อกำหนด เนื่องจากโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณประเภทเอ็ฟไออาร์จะใช้จำนวนหน่วยตัวคูณมากขึ้น เมื่อ N มีค่ามากขึ้น ฉะนั้นเราจึงปรารถนาที่จะให้ $\{w(n)\}$ มีจำนวนที่น้อยเพื่อลดจำนวนหน่วยตัวคูณลงซึ่งจะเป็นการประหยัดค่าใช้จ่ายในการสร้างวงจร

เราได้เคยศึกษามาในบทก่อน ๆ แล้วว่าการคูณสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสองสัญญาณในแกนเวลาจะหมายถึงการคอนโวลูชันของสเปกตรัมหรือฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของสัญญาณทั้งสองในแกนความถี่ กล่าวคือหากให้ $H_D(e^{j\omega})$ เป็นสเปกตรัมของ $\{h_D(n)\}$ และ $W(e^{j\omega})$ เป็นสเปกตรัมของ $\{w(n)\}$ แล้วเราจะได้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน $H_N(e^{j\omega})$ ของวงจรกรองสัญญาณประเภทเอ็ฟไออาร์ว่า

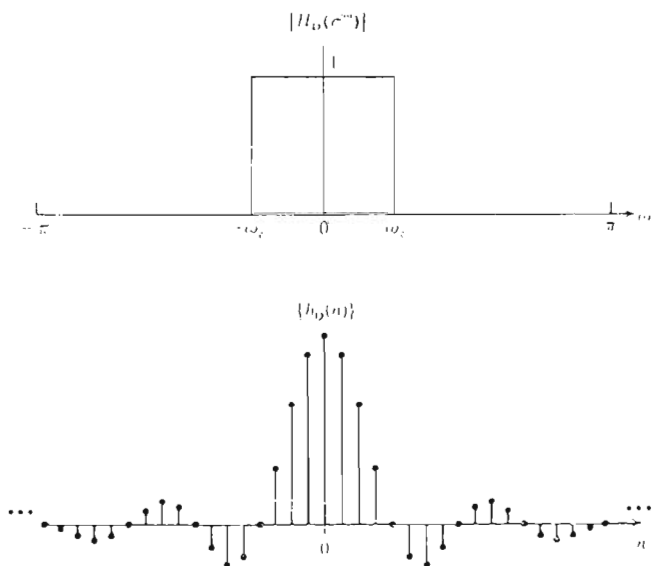
$$H_N(e^{j\omega}) = H_D(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (3.8)$$

เนื่องจากฟังก์ชันทั้งสองซึ่งอยู่ภายในเครื่องหมายอินทิกรัลเป็นฟังก์ชันที่มีคาบ การคอนโวลูชันจึงเป็นการคอนโวลูชันวงกลม (circular convolution) ดังนั้นเราจึงทำการอินทิเกรตเพียงคาบเดียวก็เพียงพอ การหาผลลัพธ์ของ (3.8) แบบสูตรสำเร็จกระทำได้ยากเนื่องจากโดยทั่วไปแล้วสเปกตรัมจะเป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนและมีรูปแบบที่ซับซ้อนเป็นฟังก์ชันของไซน์และโคไซน์อย่างไรก็ดีหากสัญญาณไม่ต่อเนื่องในแกนเวลามีลักษณะสมมาตรรอบจุด $n = 0$ แล้วสเปกตรัมจะเป็นฟังก์ชันของค่าจริงใน ω คุณสมบัติดังกล่าวนี้ช่วยให้เราสามารถมองเห็นภาพผลกระทบอันเนื่องจากการคอนโวลูชัน ดังจะอธิบายในช่วงต่อไป

เพื่อแสดงผลกระทบอันเนื่องมาจากคอนโวลูชัน เราจะลองพิจารณาการออกแบบด้วยวิธีหน้าต่างเพื่อให้ได้วงจรกรองสัญญาณซึ่งค่าตอบสนองความถี่ของขนาดมีความใกล้เคียง ค่าตอบสนองความถี่ของขนาดชนิดโลว์พาสส์อุดมคติมากที่สุด โลว์พาสส์อุดมคติซึ่งมีความถี่คutoff ที่ ω_c จะเขียนเป็นทราנסเฟอร์ฟังก์ชันที่ปรารถนาได้ว่า

$$H_D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{สำหรับ } -\pi \leq \omega < -\omega_c \text{ and } \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (3.9)$$



รูป 3.2 การตอบสนองความถี่ของโลว์พาสส์อุดมคติและค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวนอนันต์ที่ปรารถนา $\{h_D(n)\}$ ของโลว์พาสส์อุดมคตินี้ รูปนี้แสดงที่ $\omega_c = \pi/4$

ดังแสดงในรูปที่ 3.2 กรณี $\omega_c = \pi/4$ ค่าตอบสนองค่าหนึ่งของโลว์พาสส์อุดมคติดังกล่าวก็คืออินเวสิฟเรียร์ทราנסเฟอร์มของ (3.9) ซึ่งหาได้ดังนี้

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}}{j2\pi n} \\
 &= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

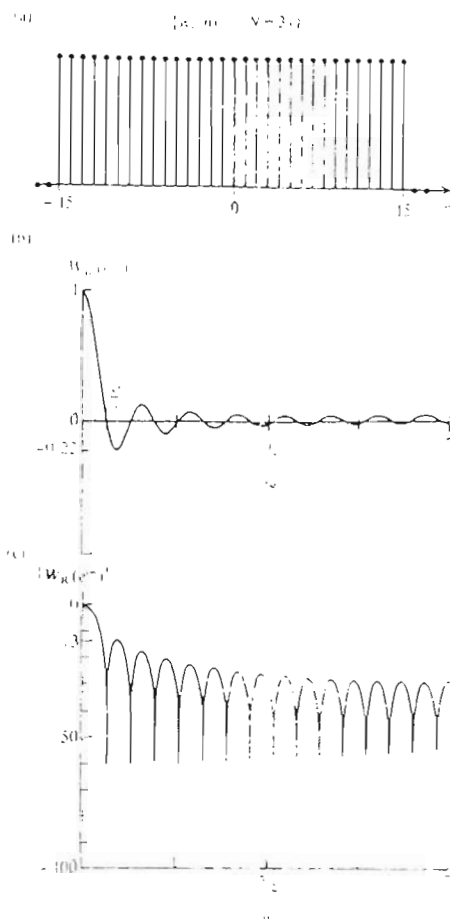
ซึ่งมีค่าลักษณะสมมาตรโดยจุดสมมาตรอยู่ที่ $n=0$ และมีจำนวนที่ไม่สิ้นสุด กล่าวคือมีค่าตามแกนเวลาทั้งบวกและลบไปจนถึงอนันต์ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ต่อไปเราจะพิจารณาการหา $\{h_D(n)\}$ จากการใช้ค่าน้ำต่างแบบต่าง ๆ อันได้แก่ แบบสี่เหลี่ยม (rectangular) แบบสามเหลี่ยม (triangular) และแบบโคไซน์

หน้าต่างสี่เหลี่ยม ค่าของหน้าต่างสี่เหลี่ยมจะมีนิยามว่า

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } -(N-1)/2 \leq n < (N-1)/2 \\ 0 & \text{สำหรับ } n \text{ อื่น ๆ} \end{cases} \tag{3.11}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นเป็นตัวอย่างในรูปที่ 3.3 กรณี $N=31$ เราจะตัดทอนค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวนอนันต์ $\{h_D(n)\}$ ใน (3.10) เพื่อให้ได้มาซึ่งค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวนอนันต์ $\{h_N(n)\}$ โดยการคูณแต่ละค่าของ $\{h_D(n)\}$ ใน (3.10) กับแต่ละค่าของหน้าต่างสี่เหลี่ยม $\{w_R(n)\}$ ใน (3.11) ดังนี้

$$\begin{aligned}
 h_N(n) &= w_R(n) h_D(n) \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n \\
 &= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad \text{สำหรับ } -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2
 \end{aligned} \tag{3.12}$$



รูป 3.3 หน้าต่างสี่เหลี่ยม (ซึ่งมี $N=31$)

- ค่าของหน้าต่างในแกนเวลา
- สเปกตรัม
- ขนาดของสเปกตรัมเป็นคี่

ค่าจริงของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน $H_N(e^{j\omega})$ ของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ ซึ่งหาได้นี้แสดงอยู่ในรูปที่ 3.4 รูปลักษณะของ $H_N(e^{j\omega})$ ที่แตกต่างไปจากลักษณะอุดมคติ สามารถจะอธิบายว่าเป็นผลจากการคอนโวลูชันระหว่าง $W_R(e^{j\omega})$ และ $H_D(e^{j\omega})$ เราจะเริ่มจากการพิจารณารูปร่างของ $W_R(e^{j\omega})$ ซึ่งเป็นตัวที่ทำให้เกิดการเบี่ยงเบนไปจากค่าตอบสนองอุดมคติ สเปกตรัมของหน้าต่างสี่เหลี่ยมเขียนได้ว่า (3.13)

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-j\omega n} = e^{j\omega((N-1)/2)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \quad (3.13)$$

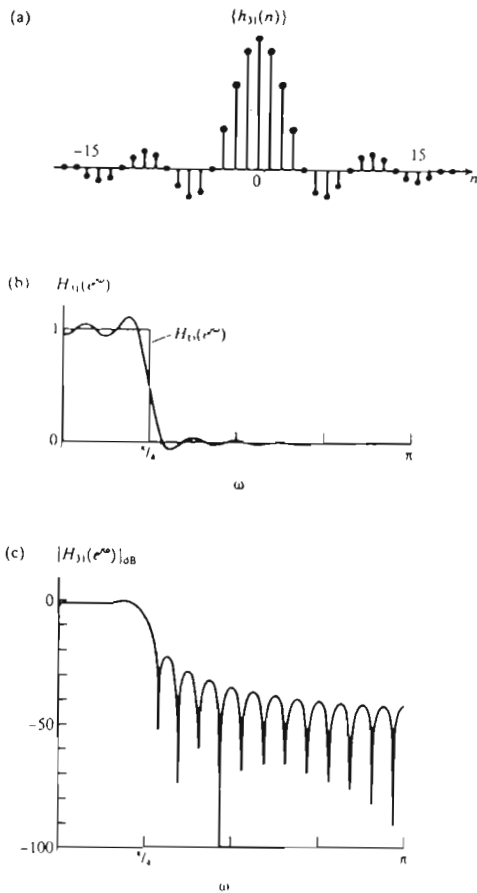
ซึ่งเมื่อใช้สูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่สิ้นสุดจะได้ว่า

$$W_R(e^{j\omega}) = e^{j\omega(N-1)/2} \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} \quad (3.14)$$

และทำให้ดูง่ายขึ้นโดยเขียนเศษและส่วนให้เป็นฟังก์ชันของไซน์ดังนี้

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= e^{j\omega(N-1)/2} \frac{e^{-j\omega N/2} e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2} e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{\sin(N\omega)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

สเปกตรัม $W_R(e^{j\omega})$ กรณี $N=31$ แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3 สเปกตรัม $W_R(e^{j\omega})$ มีลักษณะที่สำคัญสองประการสำหรับการใช้งานในที่นี้ กล่าวคือ ความกว้างของลอนหลัก (main-lobe) และความสูงต่ำ (amplitude) ของลอนข้างเคียง (sidelobe) ความกว้างของลอนหลัก หมายถึงระยะระหว่างจุดสองจุดที่อยู่ใกล้ $\omega=0$ มากที่สุด ที่ค่า $W_R(e^{j\omega})$ เป็นศูนย์ สำหรับหน้าต่างสี่เหลี่ยมความกว้างของลอนหลักจะเท่ากับ $4\pi/N$ และความสูงสุดของลอนข้างเคียงจะอยู่ที่ลอนข้างเคียงแรกซึ่งมีค่าประมาณ 22% ของความสูงของลอนหลัก หรือ -13 ดบีเมื่อเรากำหนดให้ความสูงของลอนหลักที่ $\omega=0$ อยู่ที่ 0 ดบี



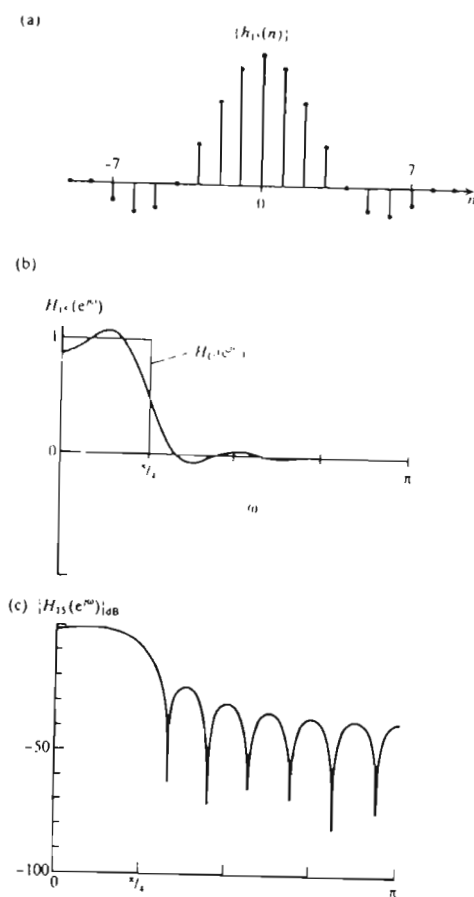
รูป 3.4 ผลจากการประยุกต์หน้าต่างสี่เหลี่ยม (ซึ่งมี $N=31$)

กับคำตอบสองค่าหนึ่งของโลว์พาสส์อิดมคติ

- คำตอบสองค่าหนึ่งซึ่งมีจำนวนที่สิ้นสุดกล่าวคือจำนวน 31
- การตอบสนองความถี่ของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันเทียบกับอิดมคติ
- การตอบสนองความถี่ของขนาดเป็นดีบี

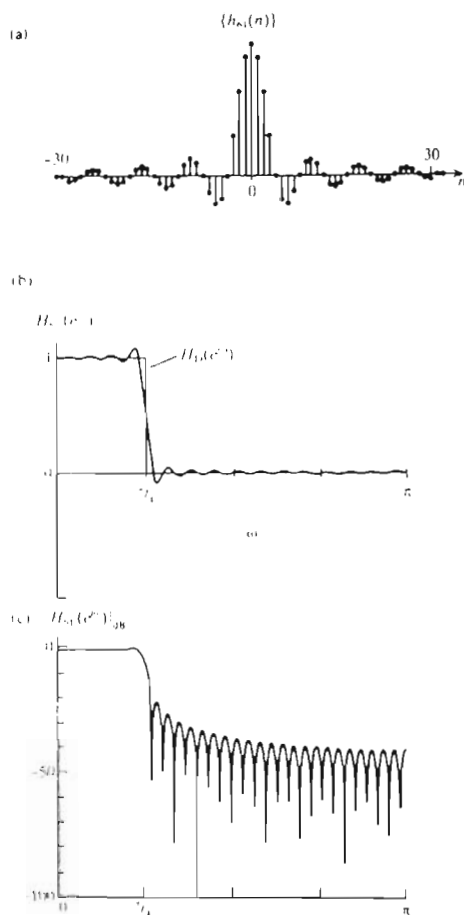
ต่อไปเราพิจารณาว่าลักษณะสำคัญสองประการนี้ส่งผลกระทบต่ออะไรไปยัง $H_N(n)$ ที่ได้รับจากการคอนโวลูชัน รูปที่ 3.4 แสดงทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน $H_N(e^{j\omega})$ และการตอบสนองของขนาด $|H_N(e^{j\omega})|_{db}$ กรณีนี้น่าสนใจที่เหลี่ยมที่มี $N=31$ ซึ่งเราจะสังเกตเห็นความแตกต่างจาก $H_D(e^{j\omega})$ และ $|H_D(e^{j\omega})|_{db}$ ที่เราปรารถนา กล่าวคือ การเปลี่ยนแปลงที่ $\omega=\omega_c$ นั้นทางอุดมคติจะเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันจากค่า 1 ไปสู่ค่า 0 แต่วงจรกรองสัญญาณที่ได้รับจะมีการเปลี่ยนแปลงแบบค่อย ๆ ลาดลงจากค่า 1 ไปสู่ค่า 0 ในย่านผ่านความถี่วงจรกรองสัญญาณที่ได้รับจะมีค่าที่สูงเกิน (overshoots) และค่าที่ต่ำกว่า (undershoots) ค่า 1 ของวงจรกรองสัญญาณที่ปรารถนา และในย่านหยุดความถี่นั้นทางอุดมคติเราต้องการให้เป็น 0 แต่วงจรกรองสัญญาณจะมีค่าที่สูงเกินและต่ำกว่าค่า 0 ที่ปรารถนาซึ่งบางครั้งก็เรียกกันว่ามีการรั่ว (leakage) เกิดขึ้นในย่านนี้

ลอนหลักของ $w_R(e^{j\omega})$ เป็นสาเหตุที่ลดความคมของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่ปรารถนาให้กลายเป็นลักษณะลาดในทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่ได้รับ ซึ่งเราจะสังเกตเห็นได้อย่างชัดเจนตรงความถี่ที่การตอบสนองความถี่ของขนาดที่ปรารถนามีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน (หรือก็คือมีความไม่ต่อเนื่องที่ความถี่นั้น) การเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันของ $H_D(e^{j\omega})$ จะถูกทำให้กลายเป็นการเปลี่ยนแปลงที่ค่อย ๆ ลาดลงของ $H_N(e^{j\omega})$ ซึ่งความลาดนี้จะสัมพันธ์กับความกว้างของลอนหลักของ $w_R(e^{j\omega})$ เนื่องจากเราทราบว่าความกว้างของลอนหลักของ $w_R(e^{j\omega})$ มีค่าเท่ากับ $4\pi/N$ เพราะฉะนั้นเราสามารถจะลดความลาดลงได้ตามแต่จะต้องการโดยการเพิ่มความกว้างของหน้าต่างหรือนั่นคือเพิ่มค่า N ให้มากขึ้น รูปที่ 3.5 และ 3.6 แสดงลักษณะของ $H_N(e^{j\omega})$ ที่ค่า N ซึ่งต่างกัน อย่างไรก็ตาม การเพิ่มจำนวน N แม้ว่าจะมีประโยชน์ตรงที่ช่วยลดความลาดลงแต่จะมีข้อเสียตรงที่ว่าเมื่อถึงตอนสร้างวงจรนั้นจำนวน N ที่สูง จะหมายความว่าเราต้องใช้หน่วยที่ทำหน้าที่คูณที่มากขึ้นด้วย (ซึ่งจะหมายถึงค่าใช้จ่ายที่สูงขึ้น)



รูป 3.5 ผลจากการประยุกต์หน้าต่างสี่เหลี่ยม (ซึ่งมี $N=15$) ของโลว์พาสต์อูมคิตี

- คำตอบสองค่าหนึ่งซึ่งมีจำนวนที่สิ้นสุดกล่าวคือจำนวน 15
- การตอบสนองความถี่ของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันเทียบกับอูมคิตี
- การตอบสนองความถี่ของขนาดเป็นดีบี



รูป 3.6 ผลจากการประยุกต์หน้าต่างสี่เหลี่ยม (ซึ่งมี $N=61$) ของโลว์พาสส์อูคมคติ

- ค่าตอบสนองค่าหนึ่งซึ่งมีจำนวนที่สิ้นสุดกล่าวคือจำนวน 61
- การตอบสนองความถี่ของทรานส์เฟอริงก์ชันเทียบกับอูคมคติ
- การตอบสนองความถี่ของขนาดเป็นดีบี

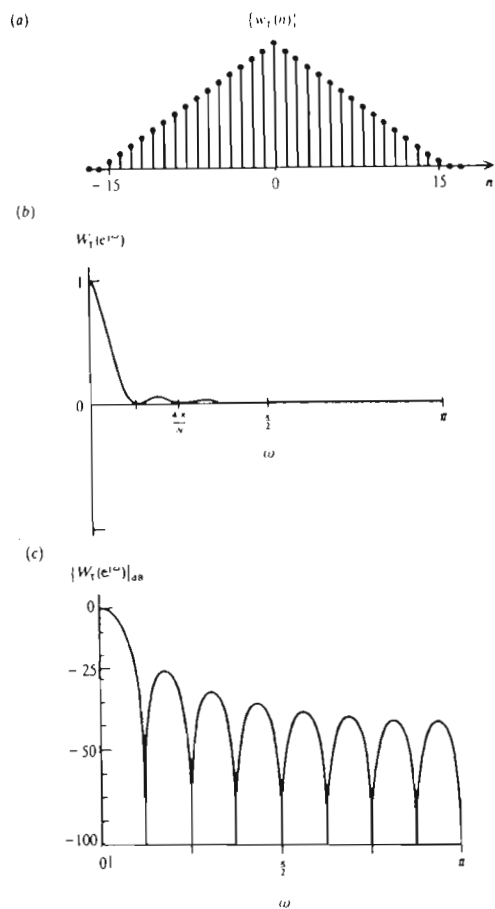
ลอนข้างเคียงของ $W_R(e^{j\omega})$ เป็นต้นเหตุของการที่วงจรกรองสัญญาณที่ได้รับมีค่าตอบสนองความถี่ของขนาดแตกต่างจากค่าทางอุดมคติในอีกรูปแบบหนึ่งกล่าวคือ ทำให้เกิดค่าที่สูงเกินและค่าที่ต่ำกว่า ค่าขนาดอุดมคติ ซึ่งเราจะสังเกตุได้ทั้งในย่านผ่านความถี่และย่านหยุดความถี่สาเหตุที่เรพบค่าที่สูงเกินและต่ำกว่าตลอดย่านความถี่จาก 0 ถึง π ก็เพราะว่า $W_R(e^{j\omega})$ มีลอนข้างเคียงครอบคลุมกว้างขวางเกือบตลอดย่านความถี่จาก 0 ถึง π เป็นที่น่าแปลกใจและโชคที่ไม่ดีด้วย ที่มีการพบว่าความสูงของค่าที่สูงเกินและความต่ำของค่าที่ต่ำกว่ามิได้เปลี่ยนแปลงถึงแม้เราจะเพิ่ม ความกว้างของหน้าต่างหรือนั่นคือเพิ่มค่าของ N ดังแสดงในรูปที่ 3.4, 3.5 และ 3.6 กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ไม่ว่าเราจะเพิ่มจำนวน (ที่สิ้นสุดหรือนับได้) ของ $\{w(n)\}$ ใน $\{w(n)\}$ ขนาดความสูงและความต่ำของค่าที่สูงเกินและต่ำกว่าจะไม่เปลี่ยนแปลงตรงใดที่เราใช้หน้าต่างสี่เหลี่ยมปรากฏการณ์นี้ เราเรียกว่า ปรากฏการณ์กิบส์ (Gibbs phenomenon) ซึ่งเรียก ตามชื่อ ของ นัก คณิตศาสตร์ ชาวอเมริกันชื่อ โรเซียร์ วิลลาร์ด กิบส์ (Josiah Willard Gibbs) แห่งมหาวิทยาลัยเชลที่พบปรากฏการณ์นี้เป็นคนแรก

เพื่อลดผลกระทบอันเนื่องจากลอนข้างเคียง $w_R(e^{j\omega})$ เราต้องพิจารณาใช้หน้าต่างประเภทอื่น ที่ความสูงต่ำของลอนข้างเคียงน้อยกว่าของหน้าต่างสี่เหลี่ยมเพื่อหาแนวทางว่าหน้าต่างใหม่นี้ควรมีรูปร่างอย่างไร เราทราบว่าลอนข้างเคียงของสเปกตรัมของ $W_R(e^{j\omega})$ ใด ๆ จะเป็นตัวบ่งว่าหน้าต่างนั้น ๆ มีส่วนประกอบความถี่สูงมากน้อยเพียงใด สำหรับ หน้าต่างสี่เหลี่ยมส่วนประกอบ ความถี่สูงนี้จะเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงฉับพลันจาก 0 ไป 1 ที่ขอบของหน้าต่าง ดังนั้นขนาดสูงต่ำของส่วนประกอบความถี่สูงกล่าวคือความสูงต่ำของลอนข้างเคียงจึงสามารถที่ลดลงได้โดยการใช้หน้าต่างที่การเปลี่ยนจาก 0 ไป 1 มีลักษณะลาดแทนที่จะมีลักษณะฉับพลัน ด้วยเหตุผลดังกล่าวมานี้เราจึงจะลองพิจารณาหน้าต่างสามเหลี่ยม ซึ่งบางทีก็เรียกว่า หน้าต่างบาร์เลตต์ (Barlett) ในตอนต่อไป

หน้าต่างสามเหลี่ยมหรือหน้าต่างบาร์เลตต์ หากเราทำหน้าต่างสี่เหลี่ยมให้เรียวลงโดยให้ค่าสูงสุดอยู่ตรงกลางจากนั้นให้ลดลงแบบเชิงเส้นไปสู่ค่าศูนย์ที่ขอบหน้าต่าง เราก็จะได้หน้าต่างสามเหลี่ยมจำนวน N ค่า ซึ่งเขียนได้ว่า

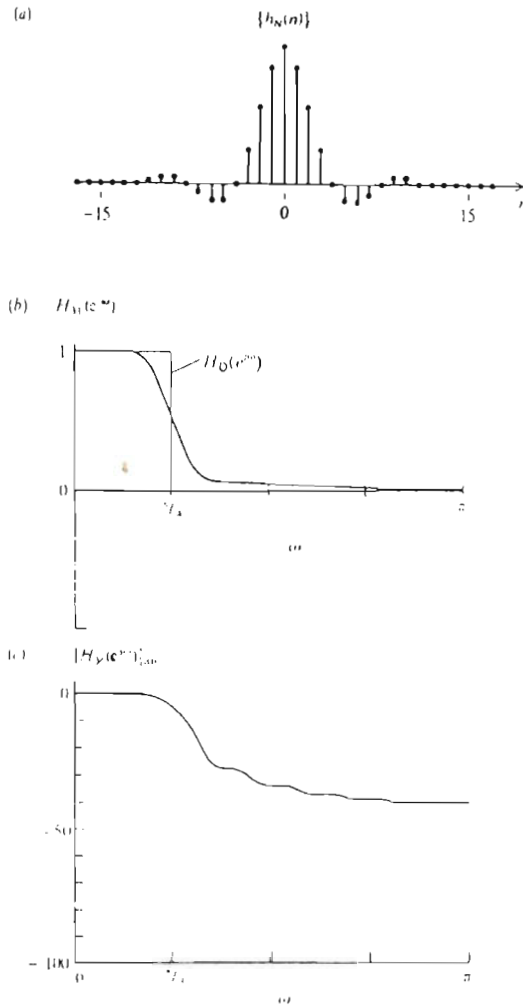
$$w_T(n) = 1 - \frac{2|n|}{N-1} \quad \text{สำหรับ} \quad -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2 \quad (3.16)$$

หน้าต่างสามเหลี่ยมและสเปกตรัม $W_T(e^{j\omega})$ ของมันแสดงอยู่ในรูปที่ 3.7 ตามที่คาดคะเนไว้ เราจะเห็นว่าลอนข้างเคียงจะเล็กลงกว่าของกรณีหน้าต่างสี่เหลี่ยม กล่าวคือลดจาก -13 ดบี เป็น -25 ดบี อย่างไรก็ตามก็ตีความกว้างของลอนหลักจะมีค่าเป็น $8\pi/N$ หรือนั่นคือกว้างเป็นสองเท่าของหน้าต่างสี่เหลี่ยมที่จำนวน N เท่ากัน นับเป็นการแลกเปลี่ยนระหว่างความกว้างของลอนหลักและระดับของลอนข้างเคียง



รูป 3.7 หน้าต่างสี่เหลี่ยม (ซึ่งมี $N=31$)

- ค่าของหน้าต่างในแกนเวลา
- สเปกตรัม
- ขนาดของสเปกตรัมเป็นดีบี



รูปที่ 3.8 ผลจากการประยุกต์หน้าต่างสี่เหลี่ยม (ซึ่งมี $N = 31$) กับค่าตอบสนองค่าหนึ่งของโลว์พาสส์อ้อมคค

- ค่าตอบสนองค่าซึ่งมีจำนวนเส้นสุดกล่าวคือ $N = 31$
- การตอบสนองความถี่ของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันเทียบกับอ้อมคค
- การตอบสนองความถี่ของขนาดเป็นคค

รูปที่ 3.8 แสดงค่าตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณประเภทเอ็ฟไออาร์ ซึ่งได้รับจากการประยุกต์หน้าต่างสามเหลี่ยมเข้ากับค่าตอบสนองค่าหนึ่งของโลว์พาสส์อ้อมคค เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่เราเคยใช้หน้าต่างสี่เหลี่ยม ก็จะพบว่าหน้าต่างสามเหลี่ยมจะให้การตอบสนองความถี่ที่เรียบกว่า การเปลี่ยนแปลงจากข่านผ่านความถี่ไปยังข่านหยุดความถี่จะไม่ชันเหมือนกรณีที่ใช้หน้าต่างสี่เหลี่ยม ในข่านหยุดความถี่การตอบสนองความถี่ก็เรียบกว่าเช่นกันแต่ความสามารถในการ

ลดทอน (attenuation) สัญญาณจะต่ำกว่า เมื่อใช้หน้าต่างสี่เหลี่ยม ด้วยลักษณะดังกล่าวมานี้ จึงทำให้หน้าต่างสามเหลี่ยมมีข้อได้เลือกที่ดีเสมอไป

ต่อไปเราจะพิจารณาหน้าต่างอีกจำพวกหนึ่งซึ่งเรียกว่า หน้าต่างเรีโคไซน์ (raised-cosine window) ซึ่งเมื่อเทียบกับหน้าต่างสามเหลี่ยมแล้วจะมีลักษณะเรียบที่บริเวณขอบหน้าต่างแต่ละข้างใกล้ 1 มากกว่าในบริเวณกลางหน้าต่าง ความเรียบที่บริเวณขอบหน้าต่างจะช่วยลดระดับของลอนข้างเคียงขณะที่ส่วนกลางของหน้าต่างที่กว้างขึ้นจะช่วยลดอาการที่เพี้ยนไปจาก $\{h_N(n)\}$ บริเวณ $n=0$

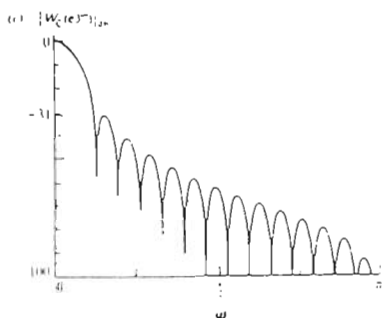
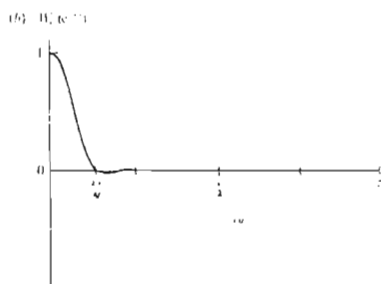
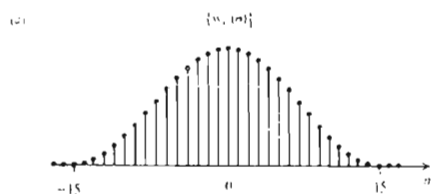
หน้าต่างเรีโคไซน์ เพื่อจะลดระดับของลอนข้างเคียงต่อไปอีก เราจะพิจารณาหน้าต่างที่บริเวณขอบมีลักษณะลาดมากขึ้น โดยการใช้ฟังก์ชันที่เรียกว่า เรีโคไซน์ ซึ่งทำให้หน้าต่างจำพวกนี้ยังแบ่งออกเป็น 3 ประเภท โดยประเภทแรกเรียกว่า หน้าต่างแฮนนิ่ง (Hanning Window) หรือบางทีก็เรียกตรง ๆ ว่าหน้าต่างเรีโคไซน์ ประเภทที่สองเรียกว่า หน้าต่างแฮมมิง (Hamming Window) และประเภทที่สามซึ่งเรียกว่า หน้าต่างแบล็คแมน (Blackman Window)

เราจะเริ่มจากการพิจารณาหน้าต่างแฮนนิ่ง ซึ่งมีสัญลักษณ์ $\{w_c(n)\}$ และนิยามว่า

$$w_c(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(2\pi n / (N-1)) & -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 0 & \text{สำหรับค่าอื่น ๆ ของ } N \end{cases} \quad (3.17)$$

รูปที่ 3.9 แสดงค่าของหน้าต่างนี้และสเปกตรัม $w_c(e^{j\omega})$ ของมันเมื่อ $N=31$ ซึ่งลอนข้างเคียงแรก (ซึ่งมีระดับสูงกว่าลอนข้างเคียงอื่น ๆ) จะอยู่ที่ -31 ดีบี นั่นคือ ต่ำกว่ากรณีหน้าต่างสามเหลี่ยม 6 ดีบี และเนื่องจากความกว้างของลอนหลักจะมีค่า $8\pi/N$ ซึ่งเท่ากับกรณีหน้าต่างสามเหลี่ยม เพราะฉะนั้นหน้าต่างแฮนนิ่งจึงเป็นที่นิยมมากกว่าหน้าต่างสามเหลี่ยม





รูป 3.9 หน้าต่างเรซโคไซน์ (แฮนนิง) (ซึ่งมี $N = 31$)

- ค่าของหน้าต่างในแกนเวลา
- สเปกตรัม
- ขนาดของสเปกตรัมเป็นดีบี

เราสามารถจะศึกษาว่าลอนข้างเคียงมีระดับลดลงไปได้จากการพิจารณาว่า $\{w_C(n)\}$ นั้นเป็นผลคูณระหว่าง ค่าเรซโคไซน์ซึ่งมีจำนวนอนันต์กับค่าหน้าต่างสี่เหลี่ยมหรือนั่นคือ

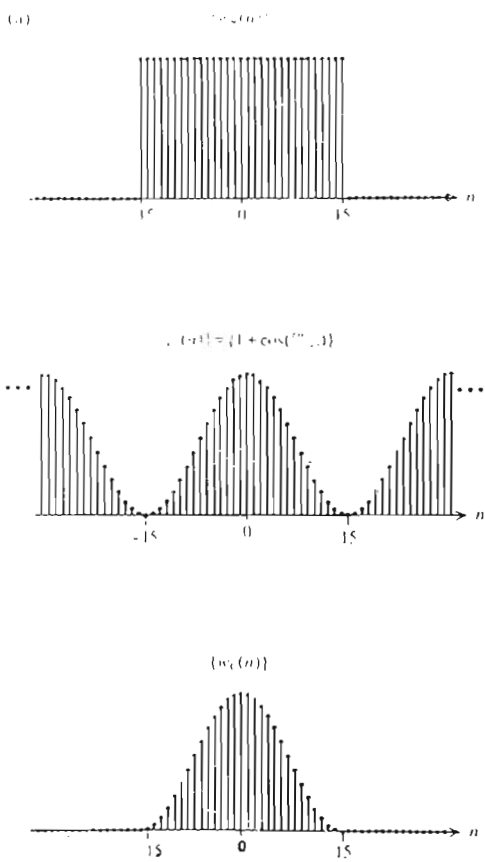
$$w_C(n) = [0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})] w_R(n) \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n$$

$$= c(n) w_R(n) \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n \quad (3.18)$$

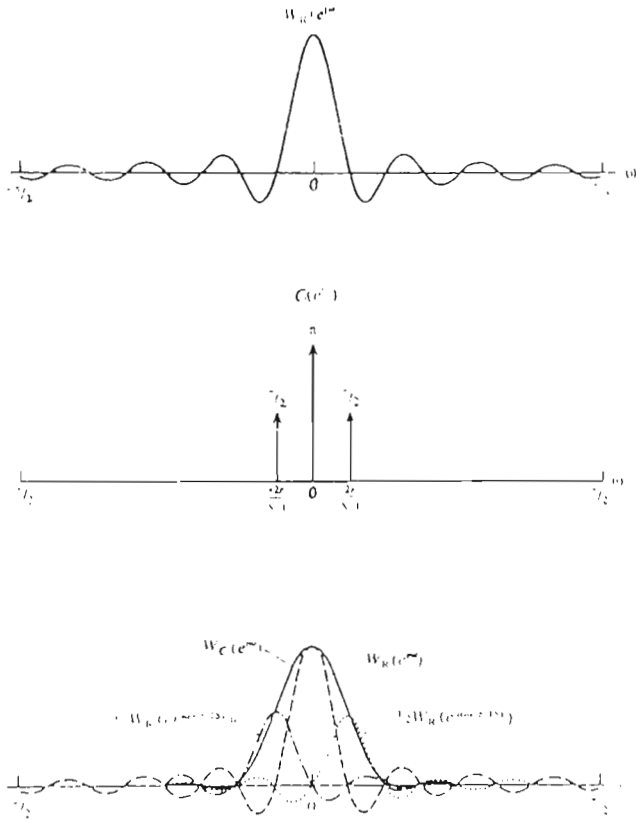
โดยที่ $\{c(n)\}$ เป็นค่าเรีลโคไซน์จำนวนอนันต์ ดังแสดงในรูปที่ 3.10 (a) การคูณในแกนเวลาตามความสัมพันธ์ (3.18) นี้ ก็คือ การคอนโวลูชันวงกลมของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชันทั้งสองในแกนความถี่นั่นเอง เนื่องจาก $\{c(n)\}$ ประกอบด้วยค่าคงที่และค่าโคไซน์ที่มีความถี่ $(N-1)$ ดังนั้นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเดลต้าดิเรค (Dirac delta function) 3 ฟังก์ชัน ดังนี้

$$C(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega) + 0.5\pi \delta(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + 0.5\pi \delta(\omega + \frac{2\pi}{N-1}) \text{ สำหรับ } -\pi \leq \omega \leq \pi \tag{3.19}$$

เมื่อเราทำการคอนโวลว $W_R(e^{j\omega})$ และ $C(e^{j\omega})$ กลไกที่เกิดขึ้นคือสเปกตรัม $W_R(e^{j\omega})$ จะไปปรากฏอยู่ที่ตำแหน่งของอิมพัลส์ทั้งสามและค่าของแต่ละสเปกตรัมจะถูกปรับไปตามน้ำหนักของแต่ละอิมพัลส์ ผลรวมของสเปกตรัมทั้งสามนี้จะให้สเปกตรัมของหน้าต่างเฮนนิ่ง $W_C(e^{j\omega})$ ตามต้องการ ดังแสดงในรูปที่ 3.10 (b) การที่สเปกตรัม $W_R(e^{j\omega})$ เคลื่อนไปปรากฏที่ตำแหน่งของอิมพัลส์ทั้งสามนั้นเราจะสังเกตว่าส่งผลให้เกิดการหักล้างระหว่างลอนข้างเคียงของสเปกตรัมทั้งสาม ทำให้ผลลัพธ์สุดท้ายคือ $W_C(e^{j\omega})$ มีลอนข้างเคียงที่ระดับของขนาดลดลงยิ่งขึ้น

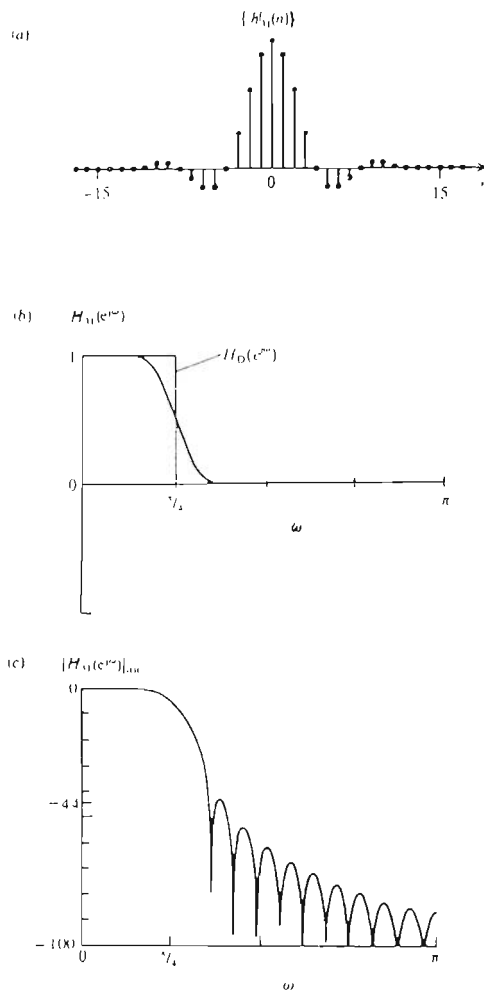


(b)



รูปที่ 3.10 การตีความหน้าค่าเรสโคไซน์หรือหน้าค่าแฮนนิ่ง
 a) แกนเวลา b) แกนความถี่

รูปที่ 3.11 แสดงผลจากการประยุกต์หน้าต่างแฮนนิ่งเพื่อออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลประเภทเอ็พไออาร์ให้มีความตอบสนองความถี่ของขนาดใกล้เคียงกับฟิลเตอร์อุดมคติมากที่สุด ข้อที่เราสังเกตได้ชัดเจนคือ ขัณฑ์ความถี่ที่มีความสามารถลดทอนสัญญาณสูงขึ้น กล่าวคือค่าสูงสุดของขนาดในขัณฑ์ความถี่จะประมาณ -44 ดบี ที่ความถี่สูงขึ้นความสามารถลดทอนสัญญาณก็จะยิ่งสูงขึ้นไปอีก



รูป 3.11 ผลจากการประยุกต์หน้าต่างเรซโคไซน์ (ซึ่งมี $N=31$) กับค่าตอบสนองค่าหนึ่งของโลว์พาสส์อูมคติ

- ค่าตอบสนองค่าซึ่งมีจำนวนสิ้นสุดกล่าวคือ $N=31$
- การตอบสนองความถี่ของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันเทียบกับอูมคติ
- การตอบสนองความถี่ของขนาดเป็นดีบี

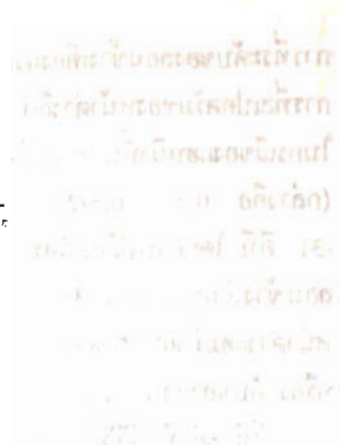
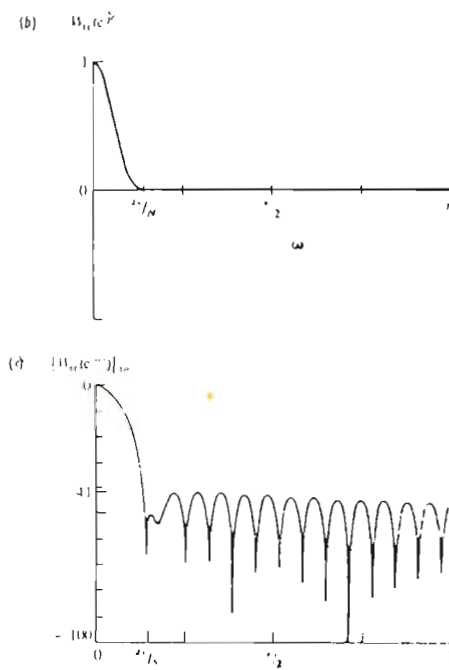
หน้าต่างต่อไปคือหน้าต่างแฮมมิงซึ่งสามารถลดระดับของลอนข้างเคียงแรกลงไปได้อีก ทั้งนี้กระทำได้โดยการเพิ่มค่าคงตัวให้แก่ หน้าต่างโคไซน์หน้าต่างแฮมมิงมีสัญลักษณ์ว่า $\{W_H(n)\}$ และมีนิยามว่า

$$W_H(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n / (N-1)) & \text{สำหรับ } -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 0 & \text{สำหรับค่าอื่น ๆ ของ } N \end{cases} \quad (3.20)$$

การที่ระดับของลอนข้างเคียงแรกลดลงไปมากกว่ากรณีหน้าต่างแชนนิงนั้นเราสามารถจะอธิบายได้จาก การที่สเปกตรัมของหน้าต่างสี่เหลี่ยม $W_R(e^{j\omega})$ เคลื่อนและถูกปรับค่าตามที่แสดงในรูปที่ 3.10 (b) ในกรณีของแชนนิงนั้น ค่าฟังก์ชันเคิลต์าคิแรกที $\omega=0$ และ $2\pi/(N-1)$ มีอัตราส่วน 2 : 1 (กล่าวคือ 0.5 : 0.5/2) ซึ่งส่งผลให้ลอนข้างเคียงแรกของ $W_C(e^{j\omega})$ มีระดับอยู่ที่ ประมาณ -31 ดบี โดยการเปลี่ยนอัตราส่วนนี้เป็น 2.35:1 (กล่าวคือ 0.54 : 0.46/2) จึงทำให้ระดับของ ลอนข้างเคียงแรกของ $W_C(e^{j\omega})$ สามารถลดลงไปได้อีกและกลายเป็นหน้าต่างแชนนิงนั่นเอง ค่า หน้าต่างแชนนิงและสเปกตรัม $W_H(e^{j\omega})$ ของมันกรณี $N=31$ แสดงอยู่ในรูปที่ 3.12 ซึ่งขนาด หรือระดับของลอนข้างเคียงแรกจะลดลงไปอยู่ที่ -41 ดบี หรือนั่นคือต่ำกว่ากรณีที่ใช้หน้าต่างแชนนิงอยู่ 10 ดบี อย่างไรก็ตามก็ยังมีข้อเสียเปรียบอื่นเมื่อเทียบกับหน้าต่างแชนนิงกล่าวคือ ลอนข้างเคียงที่ความถี่สูงของหน้าต่างแชนนิงมีระดับที่ลดลงตามลำดับ ขณะที่ลอนข้างเคียงที่ความถี่สูงของหน้าต่างแชนนิงมีระดับที่เกือบคงที่

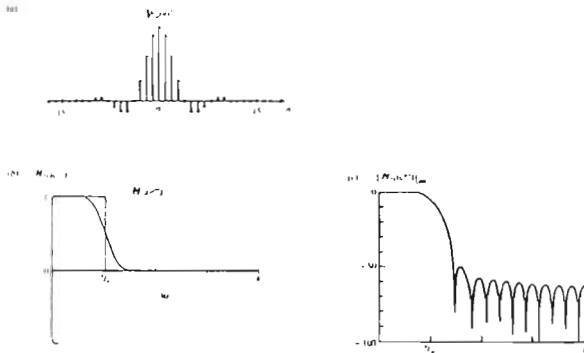
รูปที่ 3.13 แสดงผลการประยุกต์ หน้าต่างแชนนิงในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ ดิจิตอลประเภทเอ็ฟไออาร์ให้มีค่าตอบสนองความถี่ของขนาดใกล้เคียงโลว์พาสส์อุดมคติมากที่สุด ข้อที่ สังเกตได้คือ ลอนข้างเคียงแรกมีขดอยู่ที่ -51 ดบี หรือนั่นคือต่ำกว่ากรณีที่ใช้หน้าต่างแชนนิงอยู่ -7 ดบี อย่างไรก็ตามเมื่อความถี่สูงขึ้น ความสามารถที่จะกำจัดสัญญาณจะได้เพิ่มขึ้นเท่ากับในกรณีวงจร กรองสัญญาณที่ออกแบบโดยหน้าต่างแชนนิง

เราสังเกตว่าความสามารถกำจัดสัญญาณในย่านหยุดความถี่ของวงจรกรองสัญญาณนั้นจะขึ้น อยู่กับระดับของลอนข้างเคียงของฟังก์ชันหน้าต่าง แม้ว่าหน้าต่างจะสามารถให้การลดทอนถึง -51 ดบี ดังแสดงในรูปที่ 3.13 ก็ตาม แต่ก็อาจจะยังมีเพียงพอสำหรับงานบางประเภท ฉะนั้นหน้าต่างที่มี ระดับลอนข้างเคียงต่ำกว่าของหน้าต่างแชนนิงจึงเป็นสิ่งจำเป็น หน้าต่างแชนนิงสามารถลดระดับลอน ข้างเคียงได้ โดยยังรักษาความกว้างของลอนหลักอยู่ที่ ต่อไปเราจะศึกษาหน้าต่างซึ่งระดับของลอน ข้างเคียงสามารถลดลงได้อีกแต่จำเป็นต้องขยายความกว้างของลอนหลัก ตัวอย่างเช่น หน้าต่าง แบล็คแมนที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้



รูป 3.12 หน้าต่างแฮนนิ่ง ($N=31$)

- a) ค่าของหน้าต่างในแกนเวลา b) แกนความถี่
c) ขนาดของสเปกตรัมเป็นดีบี



- รูป 3.13 ผลจากการประยุกต์หน้าต่างแฮนนิ่งซึ่ง $N=31$ กับค่าตอบสนอง
ค่าหนึ่งของโลว์ a) ค่าตอบสนองค่าซึ่งมีจำนวนสิ้นสุดกล่าวคือ $N=31$
b) การตอบสนองความถี่ของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันเทียบกับอุดมคติ
c) การตอบสนองความถี่ของขนาดเป็นดีบี

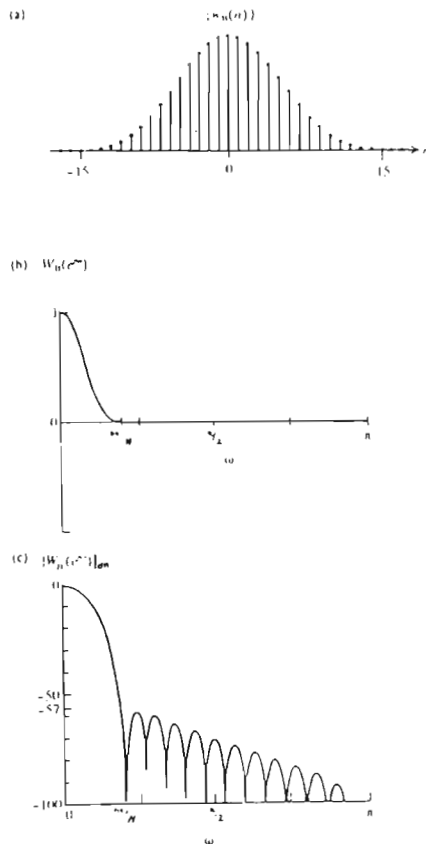
หน้าต่างแบล็คแมนสามารถลดระดับของลอนข้างเคียงต่อไปได้อีกโดยเพิ่มจำนวนโคไซน์มากขึ้น ดังนี้

$$w_B(n) = 0.42 + 0.5 \cos(2\pi n / (N-1)) + 0.80 \cos(2\pi n / (N-1))$$

$$\text{สำหรับ } -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับ } n \text{ อื่น ๆ} \quad (3.21)$$

ดังแสดงในรูปที่ 3.14 โดยที่ขนาดของลอนข้างเคียงแรกถูกลดลงไปที่ -57 ดีบีแต่ความกว้างของลอนหลักเพิ่มไปเป็น $12\pi/N$ ซึ่งเป็นตัวอย่างของการแลกเปลี่ยนระหว่างขนาดหรือระดับของลอนข้างเคียงและความกว้างของลอนหลัก



รูป 3.14 หน้าต่างแบล็คแมน ($N = 31$)
 a) ค่าของหน้าต่าง b) แกนความถี่
 c) ขนาดของสเปกตรัมเป็นดีบี

การลดลงของระดับของลอนข้างเคียงจะสามารถจะอธิบายได้ในทำนองเดียวกับที่เคยอธิบายมาแล้วในกรณีของหน้าต่างเฮนนิ่งกล่าวคือ เราสามารถเขียนหน้าต่างแบล็คแมนในรูปผลคูณระหว่างค่า จำนวนอนันต์ของแบล็คแมนและค่าของหน้าต่างสี่เหลี่ยมดังนี้

$$w_B(n) = [0.42 + 0.5 \cos(2\pi n / (N-1)) + 0.08 \cos(4\pi n / (N-1))] w_R(n)$$

$$= C_2(n) w_R(n) \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n \quad (3.22)$$

โดยที่ $\{w_R(n)\}$ เป็นค่าหน้าต่างสี่เหลี่ยมจำนวน N ค่า และ $\{C_2(n)\}$ เป็นค่าจำนวนอนันต์ของแบล็คแมน ดังที่เคยทราบมาแล้วว่าการคูณระหว่างสัญญาณสองสัญญาณในแกนเวลา ก็คือ การคอนโวลูชันของสเปกตรัมของสัญญาณทั้งสองในแกนความถี่ เนื่องจาก $\{C_2(n)\}$ ประกอบด้วยค่าคงที่หนึ่งค่าและฟังก์ชันโคไซน์สองตัวที่ความถี่ $w = 2/(N-1)$ และ $w = 4/(N-1)$ ดังนั้นเราจึงเขียนฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ (3.22) ได้ว่า

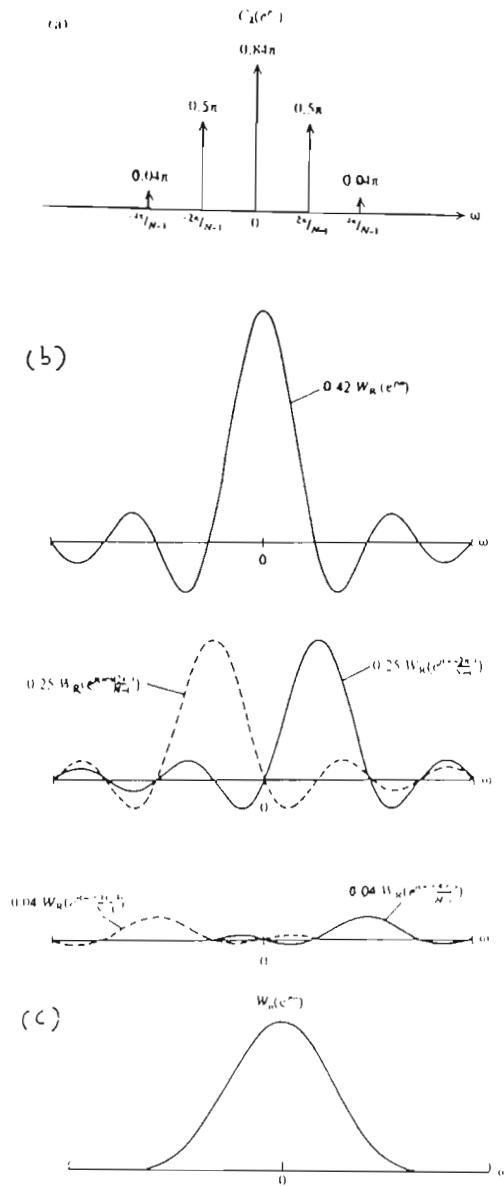
$$C_2(e^{j\omega}) = 0.84\pi \delta(\omega) + 0.5\pi \delta(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + 0.5\pi \delta(\omega + \frac{2\pi}{N-1})$$

$$+ 0.04\pi \delta(\omega - \frac{4\pi}{N-1}) + 0.04\pi \delta(\omega + \frac{4\pi}{N-1})$$

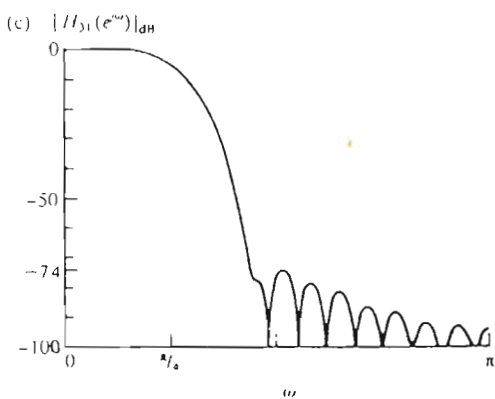
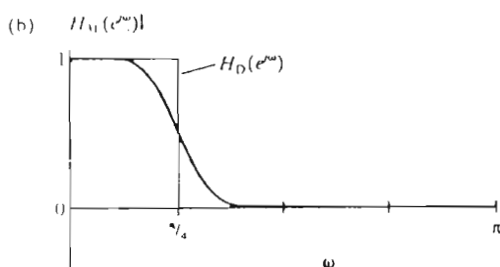
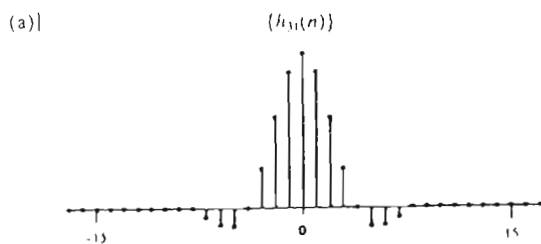
$$-\pi \leq \omega \leq \pi \quad (3.23)$$

ซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 3.15 (a) ส่วนรูปที่ 3.15(b) แสดงการที่ $w_R(e^{j\omega})$ กลอนไปอยู่ที่ตำแหน่งของอิมพัลส์ต่าง ๆ และถูกปรับค่าตามน้ำหนักของอิมพัลส์นั้น และรูปที่ 3.15 (c) แสดงสเปกตรัมของหน้าต่างแบล็คแมน $w_B(e^{j\omega})$ ซึ่งเป็นผลรวมของบรรดา $w_R(e^{j\omega})$ ที่ถูกปรับค่าและปรากฏที่ตำแหน่งอิมพัลส์ต่าง ๆ ในรูปที่ 3.15(b) เราจะสังเกตว่าความกว้างของลอนหลักที่กว้างขึ้นก็เนื่องมาจาก $w_R(e^{j\omega})$ ที่ถูกปรับค่าและปรากฏที่ $\omega = \pm 4\pi / (N-1)$ แต่ในขณะเดียวกันก็จะช่วยลดระดับของลอนข้างเคียงด้วย

รูปที่ 3.16 แสดงผลจากการประยุกต์หน้าต่างแบล็คแมนในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอ็ฟไออาร์ให้มีความตอบสนองความถี่ใกล้เคียงโลว์พาสส์อุดมคติมากที่สุด ระดับของลอนข้างเคียงจะลดลงไปอยู่ที่ -74 ดบี แต่ว่าเกิดขึ้นเมื่อ $\omega > \pi/2$ การที่ย่านเปลี่ยนแปลงมีขนาดกว้างกว่าที่พบในตัวอย่างที่ใช้หน้าต่างอื่นที่ผ่านมา ก็เพราะว่าหน้าต่างแบล็คแมนมีลอนหลักที่กว้างกว่าหน้าต่างอื่น ๆ ที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง



- รูป 3.15 การตีความหน้าต่างแบล็คแมนในแกนความถี่
- สเปกตรัมของฟังก์ชันแบล็คแมนซึ่งมีค่าถึงอนันต์
 - สเปกตรัมของหน้าต่างสี่เหลี่ยมที่ถูกปรับค่า และเคลื่อนไป อันเนื่องจากการคอนโวลูชัน
 - สเปกตรัมของหน้าต่างแบล็คแมน ซึ่งเป็นผลบวกของแต่ละสเปกตรัม



รูป 3.16 ผลจากการประยุกต์หน้าต่างแบล็กแมนซึ่ง $N = 31$

- ค่าตอบสนองค่าหนึ่งซึ่งมีจำนวนสิ้นสุด
- การตอบสนองความถี่ของทราנסเฟอร์ฟังก์ชันเทียบกับอุดมคติ
- การตอบสนองความถี่ของขนาดเป็นดีบี

ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติสเปกตรัมของหน้าต่างจำนวน N ค่า

หน้าต่าง	ความกว้างของ สเปกตรัมหลัก	ระดับสูงสุดของสเปกตรัม ข้างเคียงเป็นเดซิเบิ้ล
สี่เหลี่ยม	$4\pi/N$	-13
บาร์เล็ทท์	$8\pi/N$	-25
แฮนนิ่ง	$8\pi/N$	-31
แฮมมิง	$8\pi/N$	-41
แบล็กแมน	$12\pi/N$	-57

3.3 วิธีดีอีพีทีในการประมาณค่าตอบสนองค่าหนึ่งทีปรารถนา

ใน ตอน นี้ เราจะ ศึกษา วิธี ประมาณ ค่า ตอบ สอน ค่า หนึ่ง ที ปรารถนา ซึ่งมี สัญลักษณ์ว่า $\{h_D(n)\}$ ค่าที่ได้รับจากการประมาณจะเป็นค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่มีจำนวนสิ้นสุดและสัญลักษณ์ว่า $\{h_d(n)\}$ วิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่า วิธีดีอีพีที ซึ่งเรียกทับศัพท์ภาษาอังกฤษ DFT ข้อมาจาก Discrete Fourier Transform หรือนั่นคือวิธีฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มไม่ต่อเนื่องนั่นเอง

ค่าตอบสนองขนาด $|H_D(e^{j\omega})|$ และเฟส $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ จุดมคดิที่ปรารถนา จะมีค่าตอบสนองค่าหนึ่งทีปรารถนา $\{h_D(n)\}$ ของตัวเองเสมอ แต่จากความรู้เรื่องฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มไม่ต่อเนื่องจากบทก่อน ๆ เราทราบว่าเราสามารถหา $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่าจาก $|H_D(e^{j\omega})|$ และ $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ ได้ โดยที่ $0 \leq n \leq N_d-1$ และเราทราบว่า ที่จริงแล้ว $\{h_d(n)\}$ ที่หาได้นี้เป็นเพียงค่าในหนึ่งคาบของค่าตอบสนองค่าหนึ่งทีที่มีคาบซึ่งเราใช้สัญลักษณ์ว่า $\{h_D(n)\}$ และยิ่งกว่านั้น $\{h_d(n)\}$ นี้สัมพันธ์กับ $\{h_D(n)\}$ ตรงที่ว่า $\{h_d(n)\}$ ก็คือค่าที่มีคาบของ $\{h_D(n)\}$ ซึ่งเขียนเป็นคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$h_d(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_D(n+kN_d) \quad (3.24)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\{h_D(n)\}$, $\{h_d(n)\}$ และ $\{h_a(n)\}$ สำหรับวงจรกรองสัญญาณ โลว์พาสส์ อุดมคติแสดงอยู่ในรูปที่ 3.17 หาก $\{h_D(n)\}$ มีจำนวนอนันต์ก็จะมีกรเลื่อมในแกนเวลา (time-aliasing) อยู่บ้าง สำหรับวงจรกรองสัญญาณที่เสถียร $\{h_D(n)\}$ จะมีค่าเป็นศูนย์หรือเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ n เข้าใกล้อนันต์ทั้งค่าบวกและลบของ n เพราะฉะนั้นการเลื่อมในแกนเวลาจึงสามารถทำให้ลดน้อยลงจนละทิ้งได้ โดยการเลือก N_d ให้มีค่าสูงพอ

เพื่อให้เข้าใจการออกแบบด้วยวิธีดีเอฟทีนี้เราจะเริ่มต้นจากค่าตอบสนองขนาดและเฟสของ โลว์พาสส์อุดมคติ เพื่อที่จะหาค่าดีเอฟที จำนวน N_d ค่า เราจำเป็นต้องรู้ค่าขนาดที่ความถี่ $\omega_k = 2\pi k/N_d$ โดยที่ $0 \leq k \leq N_d - 1$ เราจะให้ $\{H_D(k)\}$ เป็นสัญลักษณ์แทนค่าที่รู้ได้ดังนั้น จึงเขียนได้ว่า

$$H_D(k) = H_D(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N_d} \quad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq N_d - 1 \quad (3.25)$$

ซึ่งเมื่อเป็นโลว์พาสส์อุดมคติเราเขียน (3.25) ให้ชัดเจนได้ว่า

$$|H_D(k)| = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq N_L \\ 0 & \text{สำหรับ } k \text{ ค่าอื่น ๆ} \end{cases} \quad N_d - N_L \leq k \leq N_D - 1 \quad (3.26)$$

โดยที่ N_L เป็นจุดที่ขอบย่านผ่านความถี่ ดังแสดงในรูปที่ 3.18 ซึ่ง $N_d = 16$ และ $N_L = 2$ การที่จะหาค่าตอบสนองค่าหนึ่งโดยการหาอินทิกรัลเรย์ทราเนสส์ฟอรัมนั้นเราจำเป็นต้องกำหนดค่าเฟสด้วย เราจะใช้กรณีที่ยากที่สุดก่อนคือ กรณีค่าเฟสเป็นศูนย์กล่าวคือ

$$\text{Arg}[H_D(k)] = 0 \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } k$$

จากค่าขนาดและค่าเฟสดังกล่าวทำให้หาค่าจริงและค่าจินต (imaginary) ได้ดังนี้

$$H_R(k) = |H_D(k)| \quad \text{และ} \quad H_I(k) = 0$$

หรือเขียนเป็นค่าเชิงซ้อนได้ว่า

$$H_D(k) = H_R(k) + jH_I(k) = H_R(k) \quad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq N_D - 1 \quad (3.26)$$

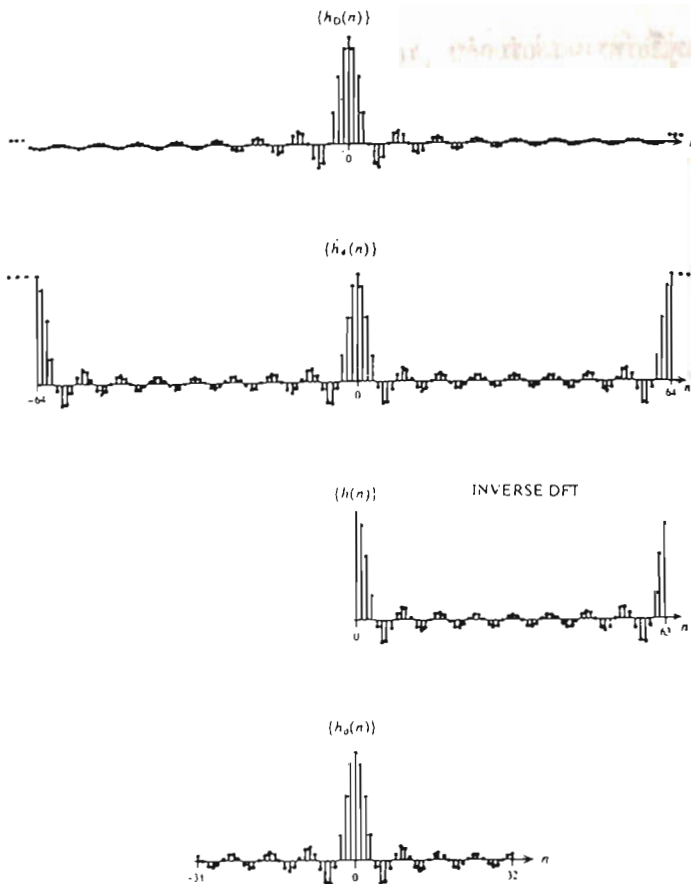
จากนี้เรากำค่าฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มกลับ $\{h(n)\}$ จำนวน N_d ค่าได้จาก

$$h(n) = \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} H_D(k) e^{j2\pi kn/N_d} \quad \text{สำหรับ } 0 \leq n \leq N_d-1 \quad (3.27)$$

ดังแสดงในรูปที่ 3.18 (b) จากนั้นเรากำค่า $\{h_d(n)\}$ จาก $\{h(n)\}$ ได้โดยการเคลื่อนย้ายค่าบางค่าของ $\{h(n)\}$ ดังแสดงในรูปที่ 3.18 (c) โดยปกติแล้วการคำนวณทั้งหลายที่กล่าวมาข้างต้นเราจะใช้เทคนิคฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม เขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ฉะนั้นแม้ว่า $|H_D(e^{j\omega})|$ และ $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ จะไม่สามารถให้สูตรสำเร็จของ $\{h(n)\}$ เราจะสามารถคำนวณหาค่า $\{h(n)\}$ และ $\{h_d(n)\}$ ได้เสมอ แต่สำหรับกรณีโลว์พาสส์อุดมคติซึ่งค่าเฟสเป็นศูนย์ที่เรากำลังพิจารณาอยู่นี้ เราสามารถหาสูตรสำเร็จของ $\{h(n)\}$ ได้ โดยสังเกตว่า $\{H_D(k)\}$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้นเราจึงหา (3.27) เฉพาะจาก $-N_L$ ถึง N_L ซึ่ง $H_D(k) = 1$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{N_{Dk=-N_L}^{N_L}} \sum_{k=-N_L}^{N_L} e^{j2\pi kn/N_d} \\ &= \frac{e^{-j2\pi N_L n/N_d}}{N_d} \sum_{k=0}^{2N_L} e^{j2\pi kn/N_d} \\ &= \frac{e^{-j2\pi N_L n/N_d}}{N_d} \frac{1 - e^{-j2\pi(2N_L+1)n/N_d}}{1 - e^{j2\pi n/N_d}} \\ &= \frac{\sin[2\pi(N_L + \frac{1}{2})n/N_d]}{N_d \sin[\pi n/N_d]} \end{aligned} \quad (3.28)$$

เนื่องจากเฟสมีค่าเป็นศูนย์เฉพาะฉะนั้น $\{h(n)\}$ ที่ได้รับจะเป็นฟังก์ชันคู่เช่นกัน จากนั้นเราย้ายค่าของ $\{h(n)\}$ ที่อยู่ระหว่าง $(N_d/2)+1 \leq n \leq N_d-1$ ให้ไปอยู่ทางแกนลบของเวลา ทำให้ได้ $\{h_d(n)\}$ ดังแสดงในรูปที่ 3.18 (c) แต่เราต้องสังเกตว่าแม้เราจะทำการย้ายค่าดังกล่าวแล้ว แต่ $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่าที่ได้รับอาจจะไม่สมมาตรรอบจุด $n = 0$ ก็ได้ ทั้งนี้เพราะ N_d เป็นเลขคู่ทำให้เรามีค่าที่ไม่เป็นศูนย์แค่ปราศจากคู่ของมันที่ตำแหน่ง $n = N_d/2$ สำหรับตัวอย่างที่เราพิจารณาก็คือค่าที่ตำแหน่ง $n = 8$ ในรูปที่ 3.18 (c) ซึ่งไม่เป็นศูนย์แค่ปราศจากคู่ของมันซึ่งควรอยู่ที่ตำแหน่ง $n = -8$ และจากความรู้เรื่องวงจรกรองสัญญาณแบบเอ็ฟไออาร์ในบทก่อน ๆ เราทราบว่าความสมมาตรดังกล่าวนี้ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นกรณีที่เรากำลังต้องการให้ได้ค่าตอบสนองความถี่ของเฟสเชิงเส้นเราจะลองศึกษาตัวอย่างที่กำลังพิจารณาอยู่นี้ซึ่งเราจะพบว่าแม้ว่าตอนเริ่มต้นเรากำหนดให้ค่า $\{\text{Arg}[H_D(k)]\}$ เป็นศูนย์แต่ค่าเฟส $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ ของวงจรกรองสัญญาณที่ได้รับจะเป็นศูนย์เฉพาะตรงความถี่ที่เราลุ่มเท่านั้น แต่จะไม่ใช่ศูนย์ที่จุดความถี่อื่น ๆ



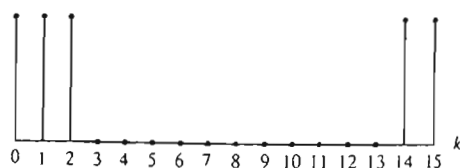
รูป 3.17 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ปรารถนา $\{h_d(n)\}$ กับค่าตอบสนองค่าหนึ่งอื่นๆ กล่าวคือ $\{h_a(n)\}$ ซึ่งเป็นค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่มีคาบของ $\{h_d(n)\}, \{h(n)\}$ ซึ่งเป็นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มกลับของขนาดที่มีเฟสเป็นศูนย์และ $\{h_d(n)\}$ ซึ่งเป็นค่าตอบสนองค่าหนึ่งโดยประมาณที่เราต้องการ

เพื่อให้เข้าใจมากขึ้นเราจะให้ $H_d(e^{j\omega})$ เป็นสัญลักษณ์แทนทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน ซึ่งได้จากการคำนวณหาฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ $\{h_d(n)\}$ ดังนี้

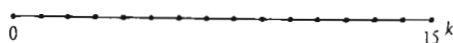
$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N_d/2+1}^{N_d/2} h_d(n) (e^{-j\omega n}) \quad (3.29)$$

ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่หาได้นี้แสดงอยู่ในรูปที่ 3.19 ซึ่งเราจะเห็นว่าตรงความถี่ที่เป็นจุดของการสุ่มค่าของฟังก์ชันนี้จะผ่านค่าที่สุ่มจากขนาดและเฟสของโลว์พาสส์อุดมคติ แต่ว่าเฟสจะไม่เป็นศูนย์ที่ความถี่อื่น ๆ รวมทั้งขนาดก็จะแตกต่างจากขนาด 1 และ 0 ที่ความถี่อื่น ๆ เช่นกัน

(a) $\{|H_0(k)|\}$

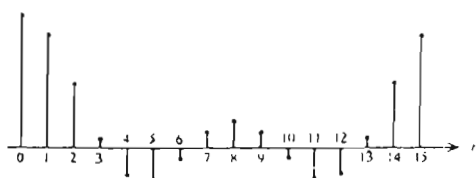


$\{\text{Arg}[H_0(k)]\}$



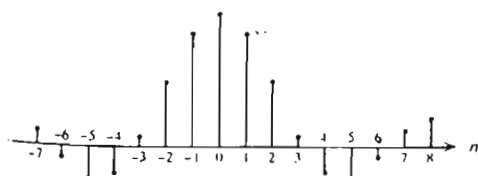
(b)

$\{h(n)\}$

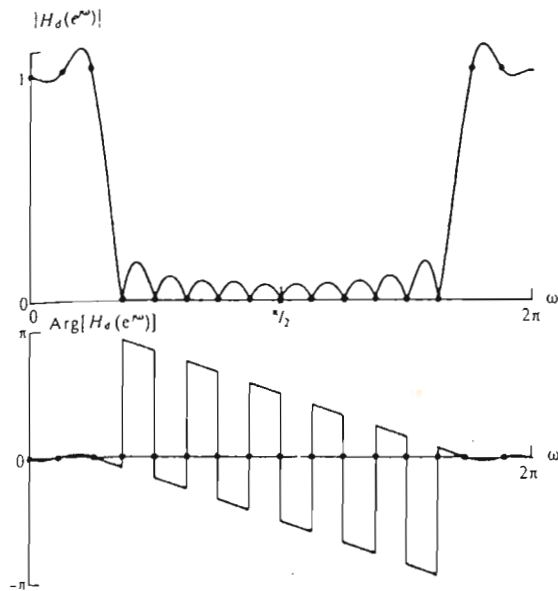


(c)

$\{h_d(n)\}$



รูป 3.18 (a) ค่าส่วนจำนวน 16 ค่าของขนาดและเฟสของโลว์พาสที่ปรารถนา
(b) ค่าฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มกลับ (c) ค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ประมาณ
ได้สำหรับวงจรกรองสัญญาณเอ็ฟไออาร์ที่ปราศจากคั่นเหตุ (non-causal)
เราควรสังเกตว่า (c) ได้มาจาก (d) โดยการเคลื่อนย้ายค่า



รูป 3.19 เปรียบเทียบฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ $\{h_d(n)\}$ ที่แสดงในรูปที่ 3.18 กับค่าที่คำนวณจากขนาดและเฟสที่ประมาณจากรูปที่ 3.18 โดยเส้นที่ปรากฏแสดงค่าฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มส่วนจุดแสดงค่าที่คำนวณ

เราจึงต้องทำการวิเคราะห์ หาความสัมพันธ์ระหว่าง $H_d(e^{j\omega})$ ที่ได้รับจากการออกแบบ และ $H_D(e^{j\omega})$ ที่ประมาณ เราเริ่มได้จากที่ทราบว่า $\{h_d(n)\}$ เป็นค่าในหนึ่งคาบของ $\{h_d(n)\}$ ซึ่งก็คือค่าของ $\{h_D(n)\}$ ที่เป็นคาบนั่นเอง เราเขียนในเชิงคณิตศาสตร์ว่า $\{h_d(n)\}$ ได้จากการคูณหน้าด้วยสัญญาณ $w_R(n)$ กับ $h_D(n)$ และหา $H_d(e^{j\omega})$ จากผลคูณดังกล่าวได้ดังนี้

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n) h_D(n) e^{-j\omega n} \quad (3.30)$$

จากที่ทราบมาในบทก่อน ๆ แล้วว่าการคูณฟังก์ชันสองฟังก์ชันในแกนเวลา ก็คือ การคอนโวลูชันวงกลมของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชันทั้งสองในแกนความถี่ ทำให้ได้ว่า

$$H_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (3.31)$$

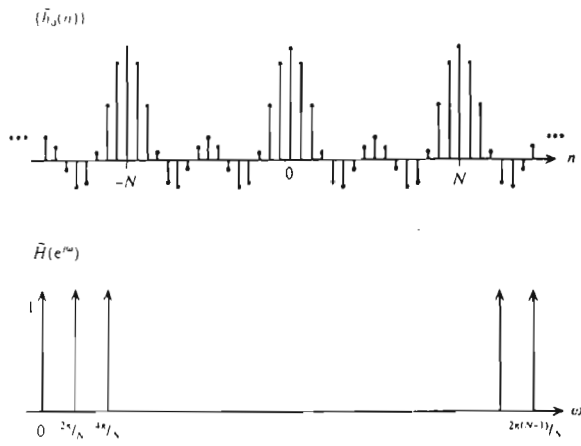
โดยที่ $w_R(e^{j\omega})$ เป็นสเปกตรัมของหน้าต่างสี่เหลี่ยมและ

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \quad (3.32)$$

เนื่องจาก $\{h_d(n)\}$ มีค่าจำนวนอนันต์ และค่าเหล่านี้จะไม่เป็นศูนย์หรือใกล้ศูนย์เมื่อถึงอนันต์ ฉะนั้นเราจึงไม่อาจหาผลบวกทางด้านขวาของ (3.32) ได้อย่างสมบูรณ์ ทำให้หาฟังก์ชันสำเร็จรูปของ $H(e^{j\omega})$ ไม่ได้แต่อย่างไรก็ดีเราสามารถแสดงได้ว่า $H(e^{j\omega})$ ประกอบด้วยฟังก์ชันเคิลต์าดิเรกที่ตำแหน่งความถี่ที่เราสุ่ม $\omega_k = 2\pi k/N_d$ โดยที่ $0 \leq k \leq N_d-1$ และน้ำหนักหรือค่าของฟังก์ชันเคิลต์าดิเรกที่ $\omega = \omega_k$ นี้ จะเท่ากับค่าของ $H_D(k)$ ดังแสดงในรูปที่ 3.20 เมื่อเราทำคอนโวลูชันฟังก์ชันเคิลต์าดิเรกนี้กับฟังก์ชันอื่น ซึ่งในกรณีที่เรากำลังศึกษาอยู่นี้คือ $w_R(e^{j\omega})$ ผลที่ได้รับก็คือ $w_R(e^{j\omega})$ จะเคลื่อนไปปรากฏที่ตำแหน่งของฟังก์ชันเคิลต์าดิเรก เราทราบดีว่าการอิตทิเกรตมีความเป็นเชิงเส้นเพราะฉะนั้น เราสามารถพิจารณา $w_R(e^{j\omega})$ ที่ไปปรากฏที่ตำแหน่งของฟังก์ชันเคิลต์าดิเรกของ $H(e^{j\omega})$ ที่ละตำแหน่ง จากนั้นจึงนำค่าเนื่องจากแต่ละตำแหน่งรวมเข้าด้วยกันทำให้ได้ $H_d(e^{j\omega})$ ซึ่งเป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในแกนความถี่ดังแสดงในรูปที่ 3.21 (b) ตามที่คาดไว้เราจะพบว่าค่า $\{H_d(k)\}$ เท่ากับค่า $H_d(e^{j\omega})$ ตรงความถี่ที่เป็นจุดของการสุ่มแล้ว $H_d(e^{j\omega})$ จะมีค่าที่สูงเกิน (overshoot) และต่ำกว่า (undershoot) คล้ายกับในกรณีการออกแบบด้วยวิธีหน้าต่างที่ศึกษามาแล้วในตอนก่อน ๆ ของบทนี้ ความสัมพันธ์ (3.30) นั้นที่จริงแล้วก็เป็นการปฏิบัติของการของฟังก์ชันหน้าต่างในการใช้ค่าหน้าต่างสี่เหลี่ยม $\{w_R(n)\}$ ในการสกัดค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวน N_d ค่าจากค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่มีคาบนั่นเอง

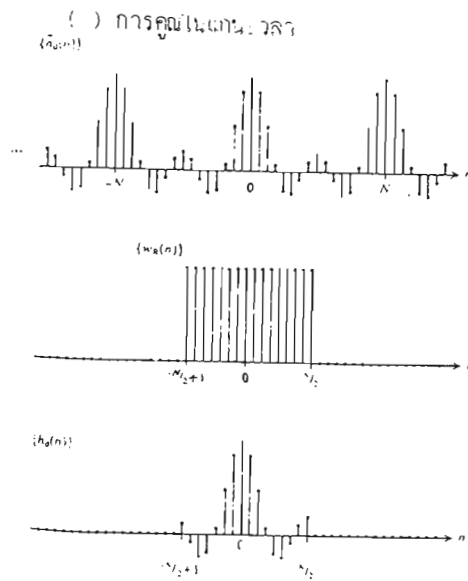
เราจึงสรุปในตอนนี้น่าจะนอกเหนือจากตำแหน่งความถี่ที่เป็นจุดของการสุ่มแล้ว $H_d(e^{j\omega})$ ที่ได้รับอาจแตกต่างจาก $H_D(e^{j\omega})$ ที่ปรารถนาได้ และความแตกต่างนี้จะมากที่บริเวณความถี่ซึ่ง $|H_D(e^{j\omega})|$ มีการกระโดด เช่นบริเวณขอบย่านผ่านความถี่ของโลว์พาสส์อ้อมคคิ แต่บริเวณความถี่ที่ $|H_D(e^{j\omega})|$ ไม่มีการกระโดดความแตกต่างจะน้อยแต่ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่า N_d ต้องมีค่าที่สูงพอด้วย

ในตอนนี้อาจได้ใช้ความรู้เรื่องฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มช่วยในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์หรือเรียกย่อ ๆ ว่า วิธืเอ็ฟที ในตอนต่อไป เราจะผสมวิธีหน้าต่างเข้ากับวิธีเอ็ฟทีเพื่อออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบเอ็ฟไออาร์

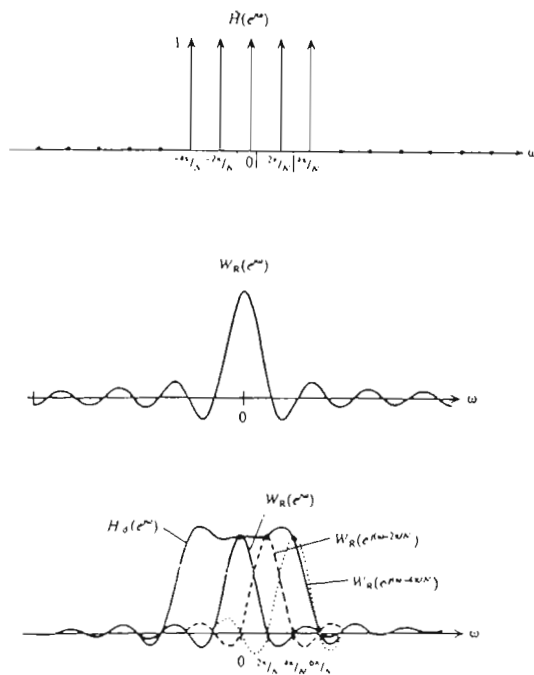


รูป 3.20 การคอนโวลูชันในแกนความถี่

(a) การคูณในแกนเวลา



(b) การคอนโวลูชันในแกนความถี่



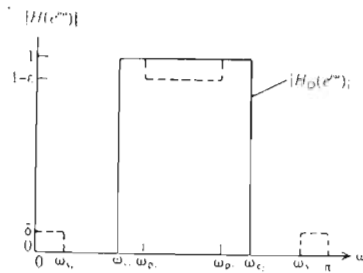
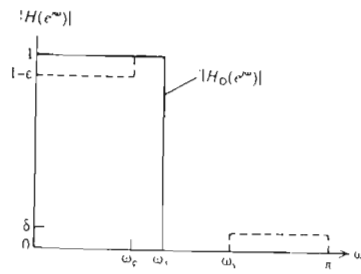
รูป 3.21 การตีความของการสุ่มเกิน และค่าต่ำกว่าของ
จากค่าที่ปรารถนา แกนเวลา และความถี่

3.4 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์โดยการผสมวิธีดีเอ็ฟทีและวิธีหน้าต่าง

ในตอนนี้เราจะรวมวิธีหน้าต่างและวิธีดีเอ็ฟทีเข้าด้วยกันเพื่อออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ การรวมวิธีทั้งสองเข้าด้วยกันช่วยกำจัดข้อเสียเปรียบของแต่ละวิธีออกไปได้ในวิธีหน้าต่างเราจำเป็นต้องทราบค่าตอบสนองความถี่ที่ปรารถนา $\{h_D(n)\}$ ซึ่งเราจะพบว่าบ่อยครั้ง เมื่อเรากำหนดขนาด $|H_D(e^{j\omega})|$ และเฟส $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ ที่ปรารถนามาให้เราสามารถหา $\{h_D(n)\}$ จากสูตรสำเร็จได้ แต่วิธีดีเอ็ฟทีจะช่วยให้เราได้โดยการให้ $\{h_D(n)\}$ ซึ่งเป็นค่าจำนวนสิ้นสุดที่ประมาณใกล้เคียงกับ $\{h_D(n)\}$ ที่ปรารถนา โดยทั้งนี้ต้องทำให้จำนวนจุด N_d มีค่าสูงพออย่างไรก็ดีในวิธีดีเอ็ฟทีโดยลำพังนั้นจะพบว่าวงจรกรองสัญญาณที่ได้รับจะมีทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน $H_d(e^{j\omega})$ ที่ปรารถนาในลักษณะของที่สูงเกิน (overshoot) และ ต่ำกว่า (undershoot) อาการเช่นลักษณะนี้สามารถจะทำให้ผลลงได้โดยใช้วิธีหน้าต่างเข้าช่วย นอกจากนี้วิธีหน้าต่างยังอนุญาตให้เราสามารถลดจำนวนของ $\{h_d(n)\}$ ลงได้ด้วย ซึ่งกระทำได้รวดเร็วที่เราไม่จำเป็นต้องไขว่คว้าหาขนาดและเฟสที่ปรารถนา การลดจำนวนของ $\{h_d(n)\}$ นี้มีอาจทำได้โดยง่ายด้วยวิธีดีเอ็ฟทีที่ลำพัง

เราจะเริ่มต้นโดยพิจารณาการหาค่าขนาดที่ปรารถนา $\{|H_D(k)|\}$ จากเงื่อนไขข้อกำหนดของขนาดที่เข้ามา จากนั้นจะพิจารณากำหนดค่าเฟสที่เหมาะสม จากค่าขนาดและเฟสที่ได้เราจะทำการหาอินเวอร์สฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มซึ่งจะให้คำตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่าต่อไปเราใช้ค่าหน้าต่างจำนวน N ค่า โดยที่ $N < N_d$ เพื่อหา $\{h_N(n)\}$ จาก $\{h_d(n)\}$

การกำหนดค่าขนาดที่เหมาะสม เมื่อใช้วิธีหน้าต่างออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ดังแสดงในตอน 3.2 เราจะพบว่าผลที่ได้รับประการหนึ่งคือ การตอบสนองความถี่ของขนาดของวงจรที่ได้รับจะมีย่านผ่านความถี่ที่แคบลงไปกว่าย่านผ่านความถี่ที่ปรารถนา การแคบลงไปนี้เป็นผลกระทบจากการคอนโวลูชันระหว่างลอนหลักของสเปกตรัมหน้าต่างกับทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน $H_D(e^{j\omega})$ ที่ปรารถนา จากประสบการณ์ดังกล่าวมานี้ เราควรกำหนดให้ค่าขนาดที่ปรารถนา $|H_D(e^{j\omega})|$ มีความถี่คัตออฟเลยเข้าไปในย่านเปลี่ยนแปลง ดังแสดงในรูปที่ 3.22 ทั้งในกรณีโลว์พาสส์และแบนด์พาสส์ การที่จะให้เลยเข้าไปเท่าไรนั้นจะขึ้นอยู่กับความกว้างของลอนหลักของสเปกตรัมหน้าต่างซึ่งจะสัมพันธ์กับจำนวนของคำตอบสนองค่าหนึ่งสุดท้ายที่ใช้และประเภทของหน้าต่างที่ใช้อย่างไรก็ดีเนื่องจากในตอนเริ่มต้นเรายังไม่มีโอกาสที่จะทราบจำนวนของคำตอบสนองค่าหนึ่งสุดท้ายดังกล่าวได้ เราจึงจำเป็นต้องใช้วิธีกะเอาซึ่งจะพบว่าประมาณ 30% ของความกว้างของย่านเปลี่ยนแปลง



รูป 3.22 ขอบเขตข้อกำหนดของโลว์พาสส์ และแบนด์ที่ปรารถนา
แสดงด้วยเส้นประ แต่จะถูกขยายออกไปให้เหมาะสมดังกล่าวด้วยเส้นทึบ

วิธีการดังกล่าวข้างต้นนี้ ทำให้เราสามารถกำหนดค่าขนาดที่ปรารถนา $|H_D(e^{j\omega})|$ ที่เหมาะสมได้จากนั้นจึงทำการสุ่ม $|H_D(e^{j\omega})|$ จำนวน N_d จุดระหว่าง $0 < \omega < 2\pi$ เพื่อให้ได้ค่า $\{H_D(k)\}$ เราจะใช้ค่า N_d ที่ค่อนข้างสูงมากกว่าจำนวนของค่าตอบสนองค่าหนึ่งของวงจรกรองสัญญาณที่จะได้รับการออกแบบนี้ โดยปกติแล้ว $N_d = 128$ จะเพียงพอสำหรับวงจรทั่วไป

เพื่อป้องกันความผิดพลาดที่อาจเกิดจากการหาค่า $|H_D(k)|$ นั้นเราจะสุ่ม $|H_D(e^{j\omega})|$ ที่ $(N_d/2)+1$ จุดระหว่าง $0 \leq \omega \leq \pi$ ก่อน จากนั้นจึงใช้คุณสมบัติสมมาตรคู่ (even symmetry) ของการตอบสนองความถี่ของขนาดค่าที่เหลือ ซึ่งกระบวนการดังกล่าวนี้ทำให้ได้ว่า

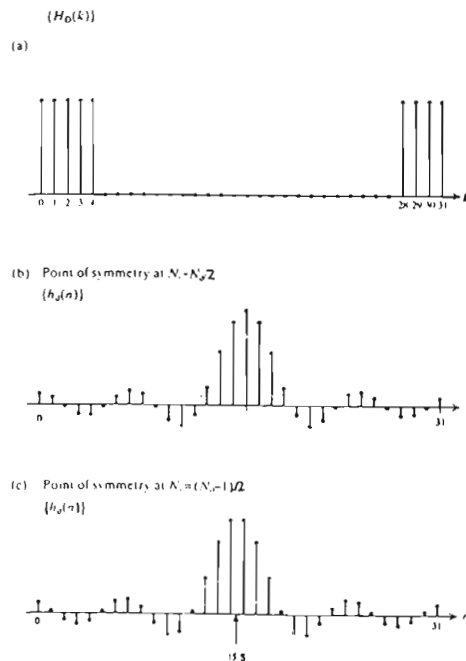
$$|H_D(k)| = |H_D(e^{j\omega})|_{\omega=e^{j2\pi k/N_d}} \quad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq N_d/2$$

$$|H_D(k)| = |H_D(N_d - k)| \quad \text{สำหรับ } (N_d/2) + 1 \leq k \leq N_d - 1 \quad (3.33)$$

การกำหนดค่าเฟสเชิงเส้นที่เหมาะสม เราเริ่มจากคุณสมบัติที่สำคัญของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ที่ว่าหากเราต้องการให้ค่าเฟสของวงจรมีค่าเป็นเชิงเส้นแล้วค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่เป็นเชิงเหตุ (causal) จำนวน N_d ค่าจะต้องแสดงความสมมาตร (ทั้งสมมาตรคู่และสมมาตรคี่) รอบจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่ประมาณกึ่งกลาง หรือที่ $N_s = (N_d - 1)/2$ ดังที่เลข

อธิบายมาในบทก่อน ๆ แล้วแต่จะทบทวนในตอนนี้ว่า ความสมมาตรมีความเป็นไปได้เพียง 4 กรณีเท่านั้น กล่าวคือ กรณีสมมาตรคู่และสมมาตรคี่ และในแต่ละกรณีจะแล้วแต่ว่าจุดสมมาตรอาจอยู่ตรงจุดกลุ่มพอดี้ หรืออยู่ระหว่างจุดกลุ่ม หากเราใช้วิธีฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มในการคำนวณหาอินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มแล้ว N_d จะต้องเป็นเลขคู่ ดังนั้นจุดสมมาตรจะไม่ตรงจุดกลุ่มพอดี้แต่จะอยู่ระหว่างจุดกลุ่ม ในตัวอย่างของโลว์พาสส์อุดมคติซึ่งค่าเฟสเป็นศูนย์ที่อธิบายในตอน 3.3 ค่าตอบสนองค่าหนึ่งจำนวน N_d ค่าเกือบจะสมมาตรรอบจุด $n = 0$ หากมิใช่เพราะว่ามีค่าที่ $n = N_d/2$ ที่ปราศจากคู่ของมัน อย่างไรก็ตามก็จริงที่กล่าวนี้เราสามารถหาค่าหน้าต่างจำนวน N ค่า โดยที่ $N < N_d$ ทำการกำจัดค่าที่ $n = N_d/2$ ได้ ทำให้ $\{h_N(n)\}$ ที่ได้รับมีความสมมาตรรอบจุดกลุ่มพอดี้

ค่าเฟสเชิงเส้นที่เหมาะสมและคล้อยจองกับค่าขนาดจะถูกกำหนดโดยคุณสมบัติความสมมาตรของค่าตอบสนองค่าหนึ่งดังกล่าวมาข้างต้น ค่าเฟสเชิงเส้นในแต่ละกรณีของสมมาตรแสดงอยู่ในตารางที่ 3.2 ในการคำนวณหาค่าจริงและค่าจินตจกค่าขนาดและเฟส เราจะใช้ค่าเฟสจากตารางที่ 3.2 นี้ได้



รูป 3.23 ผลที่ได้รับจากการเลือกความชันของเฟสเชิงเส้นที่มีต่อค่าตอบสนองค่าหนึ่ง

- (a) ค่าขนาดโลว์พาสส์อุดมคติที่ถูกกลุ่มด้วย 32 จุด และใช้ร่วมกับค่าเฟสเส้นในการคำนวณหาอินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม
- (b) ค่าตอบสนองค่าหนึ่งเมื่อเราให้ความชันของเฟสที่มีค่า -16
- (c) ค่าตอบสนองค่าหนึ่งเมื่อเราให้ความชันของที่มีค่า -15.5

ตารางที่ 3.2 ค่าตอบสนองความถี่ของเฟสเชิงเส้นในแต่ละกรณีของสมมาตรของค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่า (N_d เป็นจำนวนคู่)

สมมาตรคู่โดยจุดสมมาตรตรงจุดศูนย์กลาง $N_s = N_d/2$

$$\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})] = -\omega N_d/2 \quad \text{สำหรับ } 0 \leq \omega \leq \pi$$

สมมาตรคู่โดยจุดสมมาตรอยู่ระหว่างจุดศูนย์กลาง $N_s = (N_d-1)/2$

$$\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})] = -\omega(N_d-1)/2 \quad \text{สำหรับ } 0 \leq \omega \leq \pi$$

สมมาตรคี่โดยจุดสมมาตรอยู่ตรงจุดศูนย์กลาง $N_s = N_d/2$

$$\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})] = -\omega N_d/2 + \pi/2 \quad \text{สำหรับ } 0 \leq \omega \leq \pi$$

สมมาตรคี่โดยจุดสมมาตรอยู่ระหว่างจุดศูนย์กลาง $N_s = (N_d-1)/2$

$$\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})] = -\omega(N_d-1)/2 + \pi/2 \quad \text{สำหรับ } 0 \leq \omega \leq \pi$$

ที่ความถี่ซึ่งค่าขนาดเป็นศูนย์นั้นเราจะให้ค่าเฟสเป็นอะไรก็ได้ โดยปกติเพื่อความสะดวกเราก็มักจะให้มันเป็นค่าเชิงเส้นตามตารางที่ 3.2 ดังนั้นที่ ค่าเฟสของกรณีสมมาตรคี่จะเท่ากับ $\pi/2$ จากความรู้เรื่อง z-ทรานส์ฟอร์ม เราพบว่าค่าตอบสนองค่าหนึ่งซึ่งมีลักษณะสมมาตรคู่และจำนวนค่าเป็นจำนวนคู่ด้วยนั้น z-ทรานส์ฟอร์มของมันจะมีซีโรที่ $z = -1$ เสมอหรือนั่นก็คือค่าตอบสนองความถี่ของขนาดจะเป็นศูนย์ที่ $\omega = \pi$ กรณีเช่นนี้จะเกิดเมื่อจุดสมมาตรอยู่ระหว่างจุดศูนย์กลางที่ $N_s = (N_d-1)/2$ ทำให้ที่ $\omega = \pi$ ค่าเฟสของมันเท่ากับ $-(N_d-1)\pi/2$

การหาค่าเฟสที่ลดความผิดพลาดซึ่งจะเกิดขึ้นกระทำได้โดยการลู่ $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ ที่ $(N_d/2)+1$ จุดระหว่าง $0 \leq \omega \leq \pi$ แล้วใช้คุณสมบัติที่ว่าเฟสมีความเป็นสมมาตรคี่เสมอหาค่าส่วนที่เหลือ ทำให้ได้ว่า

$$\text{Arg}[H_D(k)] = \text{Arg}[H_D(e^{j\omega})] |_{\omega = e^{j2\pi k/N_d}} \quad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq N_d/2$$

$$\text{Arg}[H_D(k)] = -\text{Arg}[H_D(N_d-k)] \quad \text{สำหรับ } (N_d/2)+1 \leq k \leq N_d-1 \quad (3.34)$$

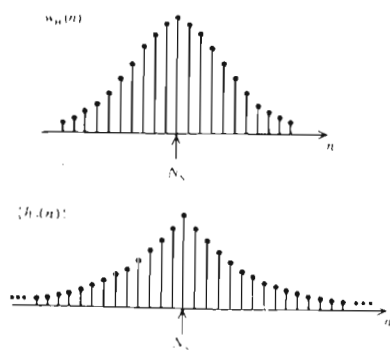
ลองพิจารณากรณีค่าตอบสนองความถี่ของขนาดของโลว์พาสส์อุดมคติ ซึ่งมีความถี่คัตออฟ $\omega_c = \pi/4$ และได้รับการสุ่มระหว่าง $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ด้วย จำนวนจุด $N_d = 32$ จากที่เรามีความรู้ว่เมื่อค่าตอบสนองค่าหนึ่งมีลักษณะสมมาตรก็แล้วทราบสัฟเฟอร์ฟังก์ชันของมันจะมีซีโรที่ $\omega=0$ ซึ่งจะไม่เหมาะสำหรับกรณีโลว์พาสส์เพราะโลว์พาสส์มีขนาดที่ไม่เป็นศูนย์ที่ $\omega=0$ เพราะฉะนั้นเราจะเลือกค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่มีลักษณะสมมาตรคู่ซึ่งจากตารางที่ 3.2 จะพบว่าทำให้เฟสเชิงเส้นเป็นไปได้เพียง 2 ลักษณะเท่านั้นคือ ลักษณะแรกคือมีเฟส -16ω โดย $0 \leq \omega \leq \pi$ และจุดสมมาตรอยู่ที่ $N_s = 16$ ซึ่งตรงกับจุดสุ่มพอดีส่วนลักษณะที่สองคือมีเฟส -15.5ω โดย $0 \leq \omega \leq \pi$ และจุดสมมาตรอยู่ที่ $N_s = 15.5$ ซึ่งอยู่ระหว่างจุดสุ่ม จากนั้นทำให้เรากำหนดค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_d(n)\}$ ของแต่ละลักษณะของเฟสได้ดังแสดงในรูปที่ 3.23

การประยุกต์หน้าต่าง ถึงตอนนี้เราสามารถหา $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่า ซึ่งจะประมาณใกล้เคียง $\{h_D(n)\}$ ที่ปรารถนา แต่เราจะไม่ใช้ $\{h_d(n)\}$ โดยตรงทันที เพราะเรายังไม่ได้ใช้ประโยชน์ตรงที่ว่า $\{h_d(n)\}$ นี้อาจให้ค่าขนาดที่อยู่ภายในเงื่อนไขข้อกำหนดของขนาดมากเกินไป ฉะนั้นหากเราลดจำนวนของ $\{h_d(n)\}$ จาก N_d ให้เป็น N โดยการใช้หน้าต่างจำนวน N เราก็จะได้วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ที่ตรงตามเงื่อนไขข้อกำหนดได้พอดี

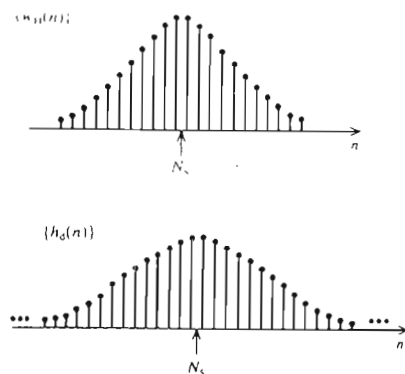
เพื่อให้ได้เฟสของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์มีความเป็นเชิงเส้น หน้าต่างที่ใช้จะต้องมีค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_N(n)\}$ ที่สมมาตรด้วย และเพื่อรักษาลักษณะสมมาตรของ $\{h_d(n)\}$ เราก็ต้องเลือก N ของหน้าต่างให้คี่ของกันด้วย กล่าวคือ หากจุดสมมาตรของ $\{h_d(n)\}$ ถูกเลือกให้ตกลงที่จุดสุ่มพอดี จำนวน N ของหน้าต่างจะต้องเป็นเลขคี่ แต่หากจุดสมมาตรตกลงระหว่างจุดสุ่มแล้ว เราต้องเลือกจำนวน N ของหน้าต่างให้เป็นเลขคู่ รูปที่ 3.24 แสดงตัวอย่างของค่าอธิบายนี้

ขั้นตอนในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณด้วยวิธีดีเอ็ฟที/หน้าต่าง หลังจากที่เราได้ทำความเข้าใจแต่ละตอนดังกล่าวมาข้างต้นแล้วในตอนนี้เราจะรวมเข้าเป็นขั้นตอนในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ที่มีเฟสเชิงเส้นด้วยวิธีดีเอ็ฟทีที่สมกับหน้าต่าง ตารางที่ 3.3 สรุปขั้นตอนทั้งหมด และเพื่อให้เข้าใจมากขึ้นเราจะลองพิจารณากรณี $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่าที่จุดสมมาตรตรงกับจุดสุ่มที่ $n = N_d/2$ ค่าหน้าต่างก็จะสมมาตรรอบจุดนี้ด้วย ดังนั้น (ส่วนกรณี $\{h_d(n)\}$ มีจุดสมมาตรอยู่ระหว่างจุดสุ่มนั้นเราก็ทำได้เช่นกันโดยการดัดแปลงเพียงเล็กน้อย)

ขั้นที่ 1 การหา $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่า เรากำหนดค่าตอบสนองความถี่ขนาดที่ปรารถนา $|H_D(e^{j\omega})|$ โดยการขยายความถี่คัตออฟ เข้าไปในย่านเปลี่ยนแปลง จากนั้นทำการสุ่ม $|H_D(e^{j\omega})|$ เพื่อให้ได้ค่าขนาด $|H_D(e^{j\omega})|$ จำนวน N_d ค่า เราจะเลือก N_d ให้มีค่าสูงมากกว่าจำนวนค่าตอบสนองค่าหนึ่งของวงจร ที่คาดว่าจะได้รับ ทั้งนี้เพื่อให้การเหลื่อมในแกนเวลาของ $\{h_d(n)\}$ มีจุดสมมาตร N_s ตรงกับจุดสุ่มพอดี



จุดสมมาตร N_s อยู่ระหว่างจุดศูนย์กลาง



รูป 3.24 การเลือกจำนวน N และกำหนดตำแหน่ง N_s
ของหน้าต่างแฮมมิงเพื่อรักษาความสมมาตรที่เดิมมีอยู่ใน $\{h_d(n)\}$

ตารางที่ 3.3 สรุปขั้นตอนการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบเอ็ฟไออาร์ด้วยวิธีอีฟทีเอ็มสมหน้าต่าง

ขั้นที่ 1 : การหา $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่า

- สกัดค่าตอบสนองขนาดที่ปรารถนา $|H_D(e^{j\omega})|$
- เลือก N_d ให้มีค่ามากกว่าจำนวนของค่าตอบสนองค่าหนึ่งสุดท้ายมาก ๆ โดยปกติ $N_d = 128$ จะเหมาะสม
- กำหนดค่าเฟสเชิงเส้น $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ เพื่อให้ได้ $\{|H_D(k)|\}$ และ $\{\text{Arg}[H_D(k)]\}$ จำนวน N_d ค่า
- หาค่า $|H_D(e^{j\omega})|$ และ $\text{Arg}[H_D(e^{j\omega})]$ เพื่อให้ได้ $|H_D(e^{j\omega})|$ และ $\{\text{Arg}[H_D(k)]\}$ จำนวน N_d ค่า
- คำนวณค่าจริง $\{H_R(k)\}$ และค่าจินต $\{H_I(k)\}$ จำนวน N_d ค่า
- คำนวณอินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มทำให้ได้ $\{h_d(n)\}$ ซึ่งเป็นค่าจริงจำนวน N_d ค่า

ขั้นที่ 2 : การหา $\{h_N(n)\}$ จำนวน N ค่า

- เลือกค่า N (ค่าเริ่มต้นที่ดีคือ $N = N_d/2$)
- คูณ $\{h_d(n)\}$ กับค่าหน้าต่าง N ค่า เพื่อให้ได้ $\{h_N(n)\}$
- คำนวณฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม จำนวน N_d ค่าจาก $\{h_N(n)\}$ ทำให้ได้ $\{H_{Nd}(k)\}$ (อาจต้องเติมค่า 0 ที่จำเป็น)
- เปรียบเทียบ $\{|H_{Nd}(k)|\}$ กับค่าขนาดที่ปรารถนา
- หาก $\{|H_{Nd}(k)|\}$ อยู่ภายในขอบเขตข้อกำหนด เราจะลดค่า N แต่หาก $\{|H_{Nd}(k)|\}$ เกินขอบเขตข้อกำหนด ต้องเพิ่ม N และทำซ้ำจาก (b) ถึง (e) จนกว่าจะพบ N ที่ทำให้ $\{|H_{Nd}(k)|\}$ อยู่ภายในขอบเขตข้อกำหนด

ขั้นที่ 3 : การสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ซึ่งมีเฟสเชิงเส้น

- หาค่าสูงสุดของ $\{|H_{Nd}(k)|\}$ และเรียกว่า HMAX
- ปรับ $\{h_N(n)\}$ โดยการคูณด้วย $1/\text{HMAX}$ เพื่อให้ได้สัมประสิทธิ์สุดท้ายของวงจร
- เลื่อนสัมประสิทธิ์ $\{h_N(n)\}$ ให้เริ่มที่ $n = 0$ เมื่อต้องการวงจรเชิงเหตุและเลื่อนให้สมมาตรรอบจุด $n = 0$ เมื่อต้องการวงจรปราศจากเหตุ
- สร้างวงจรจากสัมประสิทธิ์โดยใช้โครงสร้างเอ็ฟไออาร์เฟสเชิงเส้น

ผลกระทบน้อยมากจนละทิ้งไว้ สำหรับในหนังสือนี้ข้อกำหนดที่ปรารถนามักจะตอบสนองได้โดยใช้ วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ที่มีจำนวนค่าตอบสนองค่าหนึ่งน้อยกว่า 60 ค่า เพราะ ฉะนั้นเราจะเลือก $N_d = 128$ ซึ่งประมาณสองเท่าของ 60 ก็เป็นการเพียงพอ จากนั้นทำการ กำหนดค่าเฟสเชิงเส้น $\{Arg[H_D(k)]\}$ ที่คล้องจองกันโดยเลือกจากตารางที่ 3.2 และเพื่อ สะดวกต่อการกำหนดค่าหน้าต่างเราจะเลือกให้ $\{h_d(n)\}$ มีจุดสมมาตรที่ $n = N_d/2$

ต่อไปเรากำหนดค่าจริง $\{H_R(k)\}$ และค่าจินตยะ $\{H_I(k)\}$ จาก

$$H_R(k) = |H_D(k)| \cos(Arg[H_D(k)])$$

$$\text{และ } H_I(k) = |H_D(k)| \sin(Arg[H_D(k)]) \text{ สำหรับ } 0 \leq k \leq N_d - 1 \quad (3.35)$$

จากนี้จึงทำการคำนวณหาอินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มทำให้ได้ $\{h_d(n)\}$ จำนวน N_d ค่า

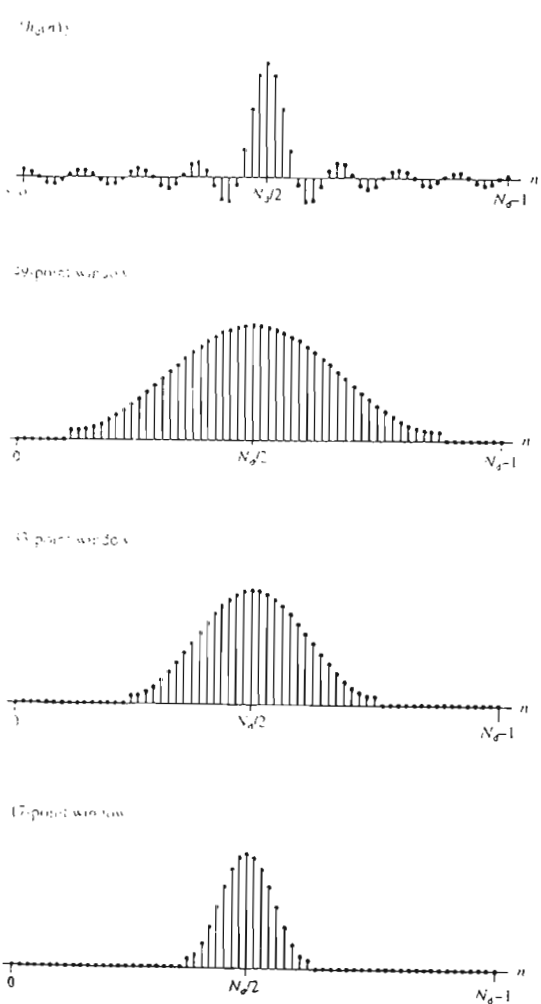
ขั้นที่ 2 การหา $\{h_N(n)\}$ จำนวน N ค่า จากการที่เราเลือก $\{h_d(n)\}$ ให้สมมาตร รอบจุด $n = N_d/2$ และมีจำนวนค่าทั้งหมดเป็นจำนวนคี่ทั้งนี้ก็เพื่อรักษาความเป็นสมมาตรคู่ ของค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_N(n)\}$ จำนวน N ค่าของมัน เราสังเกตได้ว่าเราสามารถจะเลือกค่า N เพื่อปรับความกว้างของหน้าต่างได้ดังแสดงในรูปที่ 3.25 ในที่นี้เราเลือกหน้าต่างแฮมมิงดังนี้

$$w_H(n) = \begin{cases} 0.45 + 0.46 \cos[2\pi(n - N_d/2)/(N-1)] & N_d/2 - (N-1)/2 \leq n \leq N_d + (N-1)/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (3.36)$$

ต่อไปคำนวณผลคูณระหว่าง $\{w_H(n)\}$ และ $\{h_d(n)\}$ เพื่อหา $\{h_N(n)\}$ ที่จำนวนน้อย ลงโดยที่ $N < N_d$ เป้าหมายก็เพื่อจะหา N ที่น้อยที่สุดที่ $\{h_N(n)\}$ ยังให้วงจรกรองสัญญาณ ดิจิตอลแบบเอ็ฟไออาร์ที่ค่าตอบสนองความถี่ของขนาดยังอยู่ภายในเงื่อนไขของข้อกำหนด การเลือก ค่า N นั้นปกติครั้งแรกจะเลือก $N = N_d/2$ ก่อน จากนั้นจึงค่อยปรับต่อไปหากจำเป็น

เราสามารถตรวจสอบว่าวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ที่ได้รับว่าอยู่ภายในเงื่อนไข ของข้อกำหนดหรือไม่ โดยการคำนวณฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม จำนวน N_d จุด จาก $\{h_N(n)\}$ ซึ่งมีอยู่ N จุด เราจะให้ $\{H_{Nd}(k)\}$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มนี้ $\{h_r(n)\}$ และ $\{h_i(n)\}$ เป็นค่าจริงและค่าจินตยะจำนวน N_d ค่าที่ใช้ในการคำนวณหา $\{H_{Nd}(k)\}$ ดังนั้น $\{h_r(n)\}$ จะ ประกอบด้วย $\{h_N(n)\}$ กับค่าศูนย์ซึ่งเกิดจากขั้นตอนการประยุกต์หน้าต่างหรือนั่นคือ $\{h_r(n)\} = h_d(n) w_H(n)$ โดย $0 \leq n \leq N_d - 1$ ส่วน $\{h_i(n)\}$ จะมีแต่ค่าที่เป็นศูนย์ทั้งหมด

จากนั้นเราเปรียบเทียบกับ $\{|H_{Nd}(k)|\}$ ที่ได้รับกับข้อกำหนดทั้งภายในย่านผ่านความถี่และย่านหยุดความถี่ หาก $\{|H_{Nd}(k)|\}$ ยังอยู่ภายในขอบเขตของเงื่อนไข เราก็จะทำการลด N ต่อไป แต่หาก $\{|H_{Nd}(k)|\}$ เกินขอบเขตของเงื่อนไขเราก็จะทำการเพิ่ม N ซึ่งในกรณีหลังนี้หากจำเป็นต้องใช้ N ที่มากกว่า $N_d/2$ แล้ว แสดงว่าตอนเริ่มต้นเรากำหนด N_d ต่ำไปเพราะฉะนั้นเราต้องเริ่มต้นใหม่โดยเพิ่ม N_d เป็นสองเท่า



รูปที่ 3.25 หน้าค่าที่สมมาตรรอบจุด $n = N_d/2$ และปรับความกว้างได้ เนื่องจาก $N_d/2$ เป็นเลขจำนวนเต็มหรือนั่นคือเก็บจุดสุ่มพอดี ฉะนั้นจำนวนค่าทั้งหมดของหน้าค่าต้องเป็นจำนวนคี่

หน้าค่าที่สมมาตรรอบจุด $n = N_d/2$ และปรับความกว้างได้

ขั้นที่ 3 การสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ที่มีเฟสเชิงเส้น

เนื่องจากการใช้หน้าต่างในการออกแบบ อาจทำให้ค่าตอบสนองความถี่ของขนาดที่รับถูกกดลงหรือลอยตัวขึ้น เพราะฉะนั้นเราต้องทำการปรับ (scale) ขนาดที่ทุกความถี่ให้กลับไปตรงตามข้อกำหนด ตัวอย่างเช่น ตอนเริ่มต้นเรากำหนดให้ $|H_0(e^{j\omega})|$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 1 แต่เนื่องจากการใช้หน้าต่างทำให้จำนวนค่าของ $\{h_d(n)\}$ ลดลง ซึ่งอาจส่งผลให้ค่าสูงสุดของขนาด $|H_D(e^{j\omega})|$ ที่ได้รับขั้นสุดท้ายมีค่าไม่เท่ากับ 1 เพื่อปรับให้ค่าสูงสุดนี้กลับไปอยู่ที่ 1 เราต้องหาค่าสูงสุด H_{MAX} ของ $\{|H_D(k)|\}$ แล้วทำการคูณทุกค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ได้รับท้ายสุดด้วย $1/H_{MAX}$

ตลอดเวลาของการออกแบบดังกล่าวมาขั้นต้นเราได้ใช้สมมติฐานว่าวงจรกรองสัญญาณมีลักษณะปราศจากเหตุ (non-causal) แต่ในทางปฏิบัติเมื่อนำไปสร้างนั้นวงจรกรองสัญญาณต้องมีลักษณะเชิงเหตุ (causal) ฉะนั้นเราต้องทำการเลื่อนให้ค่าแรกที่ไม่เท่ากับศูนย์ของ $\{h_N(n)\}$ ไปอยู่ที่ $n = 0$

ต่อไปเราจะแสดงตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ซึ่งมีเฟสเชิงเส้นด้วยวิธีดีเอ็ฟทีสมหน้าดังนี้

ตัวอย่างที่ 3.1 เราจะพิจารณากรณีแบนด์พาสส์ตามข้อกำหนดดังนี้

ย่านผ่านความถี่ : $-1 \leq |H(e^{j\omega})|_{dB} \leq 0$ สำหรับ $0.42\pi \leq \omega \leq 0.61\pi$

ย่านหยุดความถี่ : $|H(e^{j\omega})|_{dB} \leq -60$ สำหรับ $0.42\pi \leq \omega \leq 0.61\pi$ และ $0.87\pi \leq \omega \leq \pi$

ดังแสดงในรูปที่ 3.26 (a)

วิธีทำ ขั้นที่ 1 การหา $\{h_d(n)\}$

เนื่องจากความกว้างของย่านผ่านความถี่จะลดลงเมื่อเราใช้หน้าต่างในการออกแบบเพื่อชดเชยไว้ก่อนเราจะขยายความถี่คัทออฟให้เล็กลงเข้าไปอยู่ในย่านเปลี่ยนแปลงด้วยปริมาณ 30% ฉะนั้นจึงได้ว่า $\omega_{c1} = 0.34$ และ $\omega_{c2} = 0.69$ ดังแสดงในรูปที่ 3.26 (b)

ต่อไปเลือก $N_d = 64$ เพื่อง่ายต่อการแสดงผลพริ้นในรูปซึ่งที่จริงแล้วเราควรเลือก N_d ที่ใหญ่กว่านี้ แต่เนื่องจากการแสดงค่าในแกนเวลาจำนวน 64 ค่า จะทำได้สะดวกกว่าค่าที่ใหญ่กว่านี้

เพื่อแสดงความเป็นไปได้ทั้ง 4 แบบของ $\{h_d(n)\}$ จำนวน 64 จุด เราจะใช้คุณสมบัติของเฟสเชิงเส้นทั้ง 4 ลักษณะในตารางที่ 3.2 จุดสมมาตรจะเลือกให้อยู่ที่ $N_s = N_d/2 = 32$ หรือ $N_s = (N_d-1)/2 = 31.5$ ค่าขนาดและเฟสจะครอบคลุม $0 \leq \omega \leq \pi$ จากนั้นเราหาค่าจริงและค่าจินตจจากค่าขนาดและเฟสจากสูตร

$$H_R(k) = |H(k)| \cos(\text{Arg}[H(k)]) \quad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq N_d/2$$

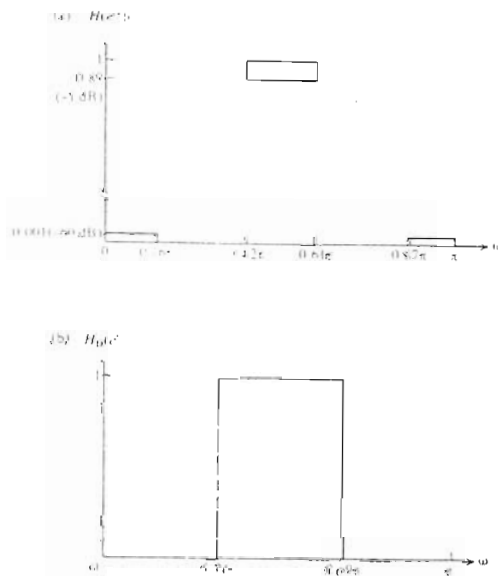
$$H_R(k) = H_R(N_d - k) \quad \text{สำหรับ } (N_d/2) + 1 \leq k \leq N_d - 1$$

และ

$$H_I(k) = |H(k)| \sin(\text{Arg}[H(k)]) \quad \text{สำหรับ } 0 \leq k \leq N_d/2$$

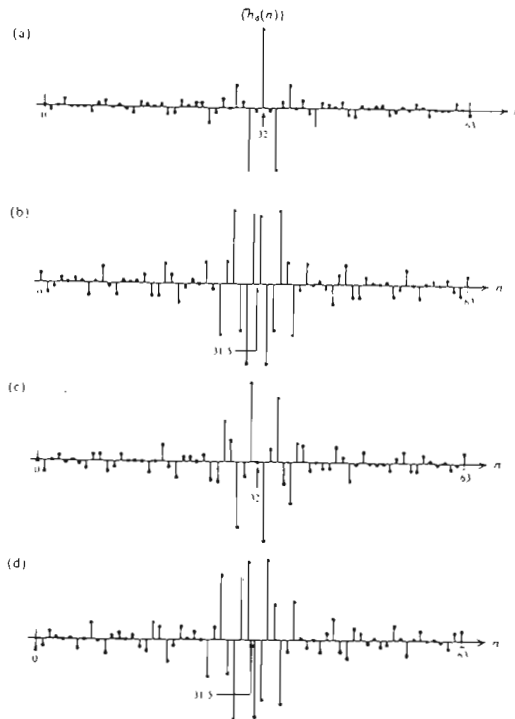
$$H_I(k) = -H_I(N_d - k) \quad \text{สำหรับ } (N_d/2) + 1 \leq k \leq N_d - 1$$

ทำให้คำนวณอินเวรตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ทั้ง 4 แบบ และได้ $\{h_d(n)\}$ ทั้ง 4 แบบดังแสดงในรูปที่ 3.27 ซึ่งเราจะเลือกแบบใดแบบหนึ่งก็ได้ทั้งสิ้น แต่เพื่อใช้ข้อได้เปรียบจากการที่ $\{h_d(n)\}$ ที่ $n = 32$ มีค่าเป็น 0 ของแบบสมมาตรในรูป 3.27 (c) อันจะทำให้เมื่อนำไปสร้างใช้งาน เราสามารถลดจำนวนการคูณที่ตำแหน่งนี้ได้ ค่าตอบสนองความถี่ $|H(e^{j\omega})|$ ของ $\{h_d(n)\}$ นี้ แสดงอยู่ในรูปที่ 3.28 ซึ่งเป็นการคำนวณฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจำนวน 512 จุด ของ $\{h_d(n)\}$ ดังกล่าว รูปที่ 3.28 แสดงให้เห็นการสูงเกินและต่ำกว่าของขนาดในย่านผ่านความถี่และการรั่วของขนาดในย่านหยุดความถี่ได้ชัดเจนซึ่งเป็นผลจากการที่เราเลือกใช้หน้าต่างสี่เหลี่ยมจำนวน 64 คำนวณเอง



รูปที่ 3.26 ค่าเริ่มต้นในแกนความถี่ของตัวอย่างที่ 3.1

- ขอบเขตค่าขนาดที่กำหนดให้
- ค่าขนาดเมื่อขยายย่านผ่านความถี่เข้าไปในย่านเปลี่ยนแปลง ทำให้กลายเป็นฟังก์ชันขนาดที่ปรารถนา

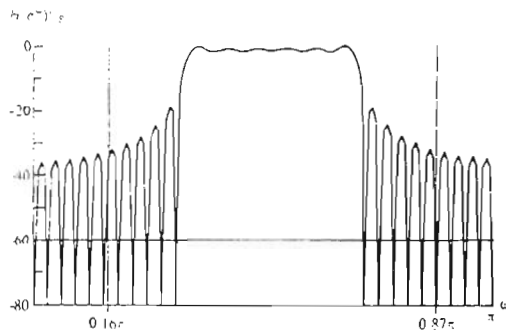
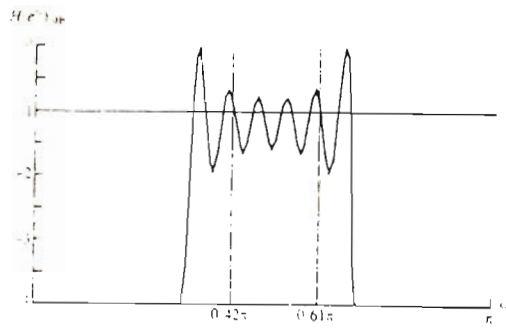


รูปที่ 3.27 ค่าตอบสนองค่าหนึ่ง $\{h_d(n)\}$ ทั้ง 4 แบบอันเนื่องจากคุณสมบัติเฟสเชิงเส้นที่เป็นไปได้ 4 แบบ

- (a) สมมาตรคู่ซึ่งจุดสมมาตรตรงจุดศูนย์กลาง
- (b) สมมาตรคู่ซึ่งจุดสมมาตรอยู่ระหว่างจุดศูนย์กลาง
- (c) สมมาตรคี่ซึ่งจุดสมมาตรตรงจุดศูนย์กลาง
- (d) สมมาตรคี่ซึ่งจุดสมมาตรอยู่ระหว่างจุดศูนย์กลาง

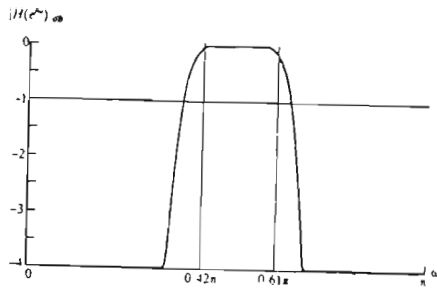
ขั้นที่ 2 การหา $\{h_N(n)\}$

ต่อไปเราจะใช้หน้าค่าแฮมมิง 33 ค่าคูณกับ $\{h_d(n)\}$ ทำให้ได้ $\{h_{33}(n)\}$ ซึ่งค่าตอบสนองขนาดของมันแสดงอยู่ในรูปที่ 3.28 (a) ซึ่งเราจะสังเกตว่ามีความเรียบกว่าในรูปที่ 3.27 มาก ในย่านผ่านความถี่ค่าขนาดจะอยู่ภายในขอบเขตเงื่อนไขข้อกำหนดระหว่าง -1 และ 0 ดีบี แต่ระดับสูงสุดของขนาดในย่านหยุดความถี่จะประมาณ -60 ดีบีพอดี หากเราใช้หน้าค่าแฮมมิงที่ต่ำกว่า 33 ค่า ก็จะทำให้ขนาดในย่านหยุดความถี่เกินขอบเขตของข้อกำหนด

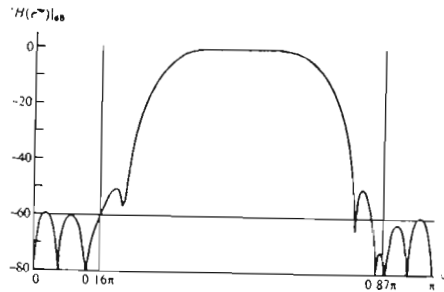


รูปที่ 3.28 ค่าตอบสนองความถี่ของขนาดจาก $\{h_d(n)\}$
ที่แสดงในรูปที่ 3.27 (c)

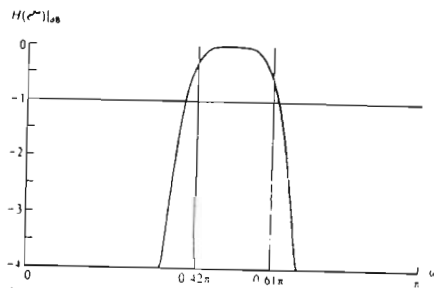
เพื่อจะลดระดับของขนาดในย่านหยุดความถี่ลงไปอีกเราจึงลองใช้หน้าต่างแบล็กแมนจำนวน 33 ค่าซึ่งผลที่ได้รับแสดงอยู่ในรูปที่ 3.29 (b) ซึ่งทั้งในย่านผ่านความถี่และหยุดความถี่ค่าขนาดจะอยู่ในขอบเขตของข้อกำหนด จากนั้นเราจึงทดลองลดจำนวนค่าหน้าต่างแบล็กแมนซึ่งจะพบว่าจำนวน 31 ค่าจะต่ำสุดที่ยังให้ค่าขนาดของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลอยู่ในขอบเขตของข้อกำหนด โดยรูปร่างการตอบสนองความถี่ของขนาดจะคล้ายคลึงกับในรูปที่ 3.29 (b) แต่มีระดับในย่านหยุดความถี่สูงขึ้น หากเราใช้หน้าต่างแบล็กแมนที่จำนวนค่าต่ำกว่า 31 จะทำให้ระดับขนาดในย่านหยุดความถี่เกินข้อกำหนด เพราะฉะนั้น $N = 31$ จึงต่ำสุด ที่ให้ $\{h_{31}(n)\}$



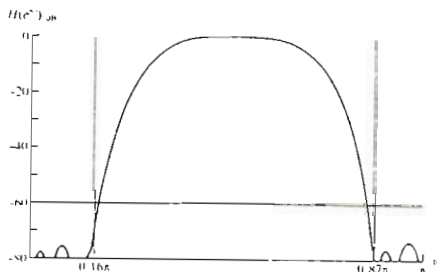
ย้ายหุคความถี่:



b) ผลลัพธ์จากการใช้หน้าต่างเบ็ตต์แมน 33 ค่าย้ายผ่านความถี่



c) ย้ายหุคความถี่:



รูปที่ 3.29 ค่าตอบสนองความถี่ของขนาดเพื่อใช้หน้าต่างกับ $\{h_d(n)\}$

ในรูปที่ 3.27 (c)

(a) ผลการใช้หน้าต่างแฮมมิง 33 ค่า

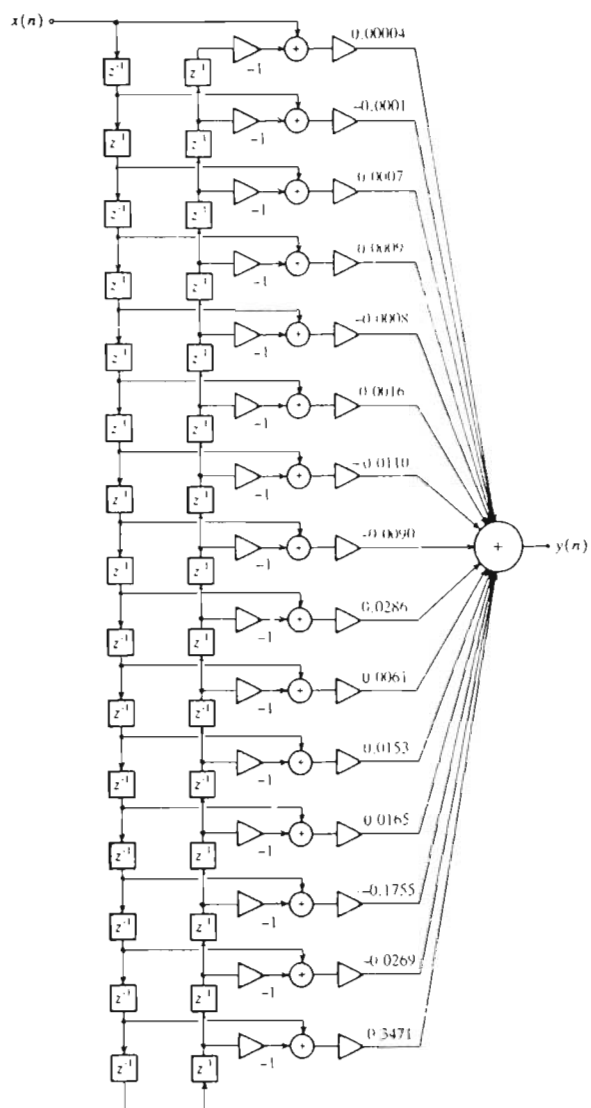
(b) ผลการใช้หน้าต่างเบ็ตต์แมน 33 ค่า

ขั้นที่ 3 การสร้างวงจร

เราหาค่าขนาดสูงสุดของ $|H(e^{j\omega})|$ สำหรับ $\{h_{31}(n)\}$ ว่าเป็น $H_{MAX} = 0.9998$ ซึ่งใกล้เคียงกับค่า 1 มาก เพราะฉะนั้นจึงไม่จำเป็นต้องปรับสัมประสิทธิ์ใน $\{h_{31}(n)\}$ ด้วยการคูณกับ $1/H_{MAX}$ โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์ลักษณะเชิงเหตุแสดงอยู่ในรูปที่ 3.30 ซึ่งเราจะสังเกตว่า ตัวหน่วง (delay) ที่ 15 นั้นที่จุดสัญญาณออก (output) มีได้ต่อเข้ากับตัวคูณทั้งนี้เป็นผลจากที่ $h_{31}(15) = 0$ อย่างไรก็ดีการประหยัคตัวคูณดังกล่าวทำให้เราจำเป็นต้องคูณสัญญาณที่จุดออกของตัวหน่วง 15 ตัวด้วย -1 เพื่อให้ได้สมมาตรคี่ของค่าตอบสนองค่าหนึ่ง หากเราเลือกใช้ $\{h_d(n)\}$ ที่มีลักษณะสมมาตรคู่การคูณด้วย -1 จะไม่จำเป็น กระนั้นก็ตามหากทางด้านฮาร์ดแวร์ที่ใช้อนุญาตให้การลบมีประสิทธิภาพเท่า ๆ กับการบวกแล้ว โครงสร้างในรูปที่ 3.30 ก็มีประสิทธิภาพที่ไม่ด้อยกว่า

3.5 สรุป

ในบทนี้เราได้เรียนรู้วิธีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์สองวิธี วิธีแรกเรียกว่าวิธีหน้าต่าง ซึ่งจะมีประโยชน์ในการออกแบบจากค่าตอบสนองค่าหนึ่งที่ทราบค่าหรือเป็นสูตรสำเร็จซึ่งได้จากการคำนวณอินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจากค่าขนาดและเฟสที่กำหนดมาให้ วิธีที่สองเรียกว่า วิธีดีเอ็ฟที/หน้าต่าง ซึ่งค่าตอบสนองค่าหนึ่งจะคำนวณโดยหาอินเวสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มไม่ต่อเนื่องจากค่าขนาดที่ปรารถนาและค่าเฟสเชิงเส้นที่เหมาะสม จากนั้นจะใช้ค่าหน้าต่างช่วยลดจำนวนค่าตอบสนองค่าหนึ่งลงและขณะเดียวกันช่วยกำจัดอาการเพี้ยนลักษณะสูงเกินและต่ำกว่าขนาดที่ปรารถนาในย่านผ่านความถี่และการรั่วในย่านหยุดความถี่ด้วย



รูปที่ 3.30 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบเอ็ฟไออาร์
 ซึ่งมีเฟสเชิงเส้น ซึ่งเป็นผลจากการออกแบบโดย
 ใช้หน้าต่างแบ็ลคแมน 3 ค่า

เอกสารอ้างอิง

1. R.Kuc, Introduction to Digital Signal Processing, Mc Graw-Hill, International Editions, 1988
2. J.R. Johnson, Introduction to Digital Signal Processing, Prentice-Hall, International Editions, 1989
3. J.G. Proakis and D.G. Manolakis, Introduction to Digital Signal Processing, Macmillan Publishing, New York, 1988
4. D.F. Elliont (Editor), Handbook of Digital Signal Processing Engineering Applications, Academic Press, San Diego, 1987



